Modele warunkowej heteroscedastyczności

- Niskie koszty transakcyjne

- Niskie koszty transakcyjne
- Racjonalne oczekiwania inwestorów

$$P_t = \frac{E(P_{t+1} \mid I_t)}{1 + R} \tag{1}$$

- Niskie koszty transakcyjne
- Racjonalne oczekiwania inwestorów

$$P_t = \frac{E(P_{t+1} \mid I_t)}{1 + R} \tag{1}$$

- Jeżeli równość (1) jest spełniona to nie ma możliwości arbitrażu

- Niskie koszty transakcyjne
- Racjonalne oczekiwania inwestorów

$$P_t = \frac{E(P_{t+1} \mid I_t)}{1 + R} \tag{1}$$

- Jeżeli równość (1) jest spełniona to nie ma możliwości arbitrażu
- Równanie (1) nazywane jest hipotezą rynku efektywnego

- Jeżeli I_t zawiera jedynie ceny z przeszłości, to

$$E(P_t \mid P_{t-1}, P_{t-2}, \ldots) = P_{t-1}(1 + R)$$

- Jeżeli I_t zawiera jedynie ceny z przeszłości, to

$$E(P_t \mid P_{t-1}, P_{t-2}, \ldots) = P_{t-1}(1 + R)$$

- Dzieląc obie strony przez P_{t-1} i logarytmując

$$E(\Delta \ln P_t \mid P_{t-1}, P_{t-2}, \ldots) = \ln(1 + R)$$

- Jeżeli I_t zawiera jedynie ceny z przeszłości, to

$$E(P_t \mid P_{t-1}, P_{t-2}, \ldots) = P_{t-1}(1 + R)$$

- Dzieląc obie strony przez P_{t-1} i logarytmując

$$E(\Delta \ln P_t \mid P_{t-1}, P_{t-2}, \ldots) = \ln(1 + R)$$

- Oznaczając $p_t = \ln(P_t)$ oraz $r = \ln(1 + R)$ oraz definiując $\varepsilon_t = \Delta p_t - r$ uzyskujemy

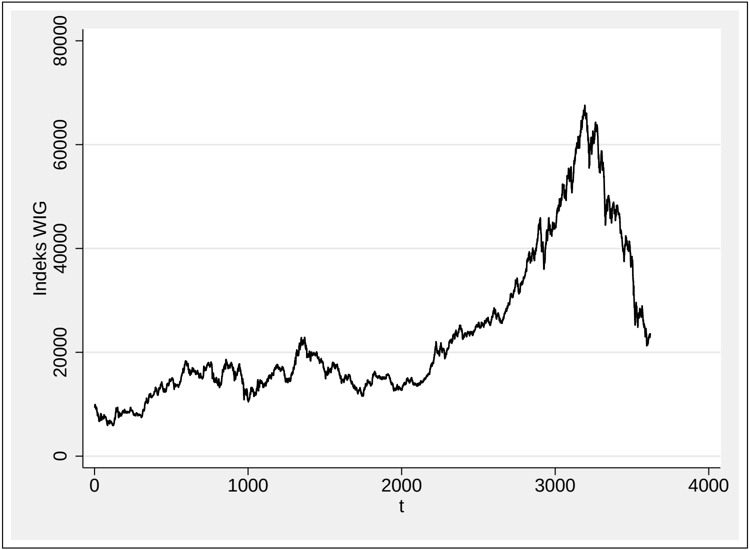
$$\Delta p_t = r + \varepsilon_t$$

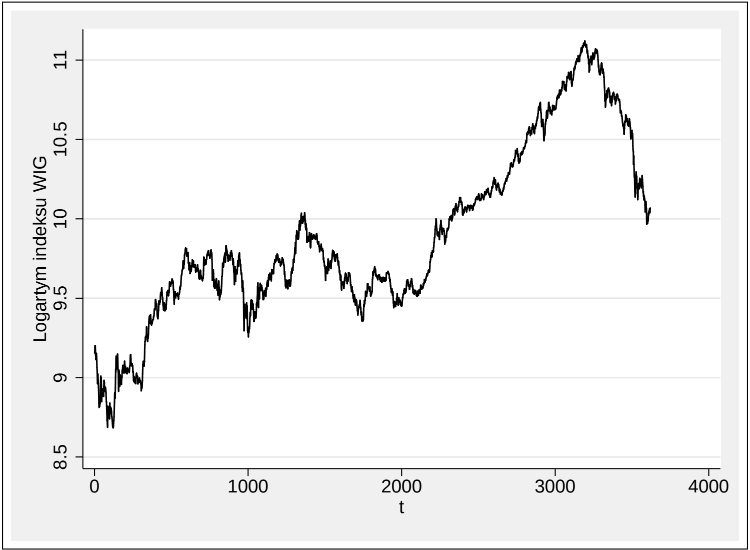
gdzie $E(\varepsilon_t \mid P_t, P_{t-1}, \ldots) = 0 \Leftrightarrow E(\varepsilon_t \mid \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = 0$

- Przyrost ceny ma warunkową wartość oczekiwaną r

- Przyrost ceny ma warunkową wartość oczekiwaną r
- Nie jest możliwe przewidzenie przyszłych cen

- Przyrost ceny ma warunkową wartość oczekiwaną r
- Nie jest możliwe przewidzenie przyszłych cen
- Logarytmy cen zachowują się zgodnie z procesem błądzenia przypadkowego


Indeks WIG
0
20000
40000
60000
80000
0
1000
2000
3000
4000
t


Logartym indeksu WIG
8.5
9
9.5
10
10.5
11
0
1000
2000
3000
4000
t

Stacjonarność logarytmu WIG

```
. dfuller lnwig, lags(20) reg

Augmented Dickey-Fuller test for unit root         Number of obs   =      3598

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)             -1.676            -3.430            -2.860            -2.570
------------------------------------------------------------------------------
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.4433
```

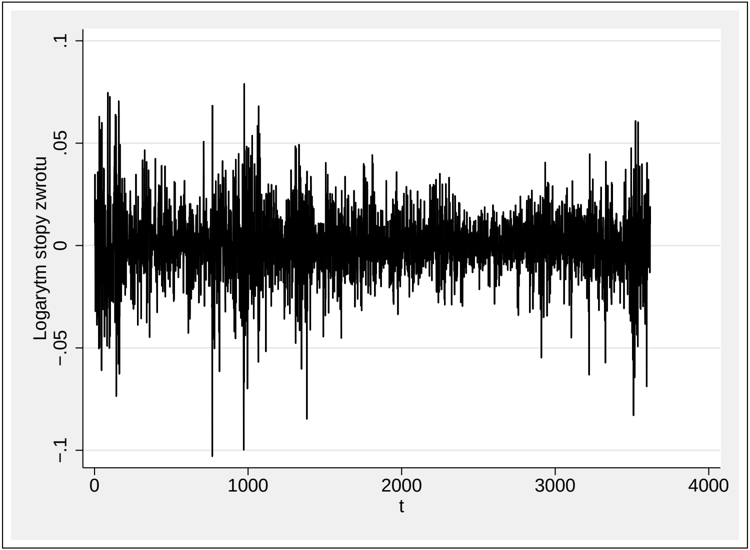
Stacjonarność logarytmu WIG

```
. dfuller lnwig, lags(20) reg

Augmented Dickey-Fuller test for unit root         Number of obs   =      3598

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)             -1.676            -3.430            -2.860            -2.570
------------------------------------------------------------------------------
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.4433
```

- Zatem logarytm WIG jest niestacjonarny


Logarytm stopy zwrotu
.1
.05
0
−.05
−.1
0
1000
2000
3000
4000
t

Stacjonarność zwrotów z WIG

```
. dfuller dlnwig, lags(20) reg

Augmented Dickey-Fuller test for unit root         Number of obs   =      3597

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)            -12.776            -3.430            -2.860            -2.570
------------------------------------------------------------------------------
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000
```

Stacjonarność zwrotów z WIG

```
. dfuller dlnwig, lags(20) reg

Augmented Dickey-Fuller test for unit root         Number of obs   =      3597

                              ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)            -12.776            -3.430            -2.860            -2.570
------------------------------------------------------------------------------
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000
```

- Zatem logarytmiczna stopa zwrotu z WIG jest stacjonarna

Czy zwrot z WIG jest białym szumem

- test Ljunga-Boxa dla WIG

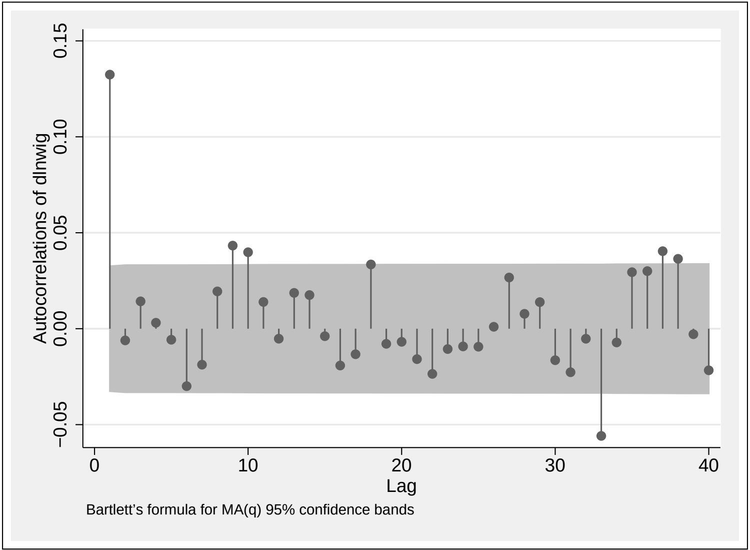
```
Portmanteau test for white noise
---------------------------------------
 Portmanteau (Q) statistic =   133.7683
 Prob > chi2(40)           =     0.0000
```

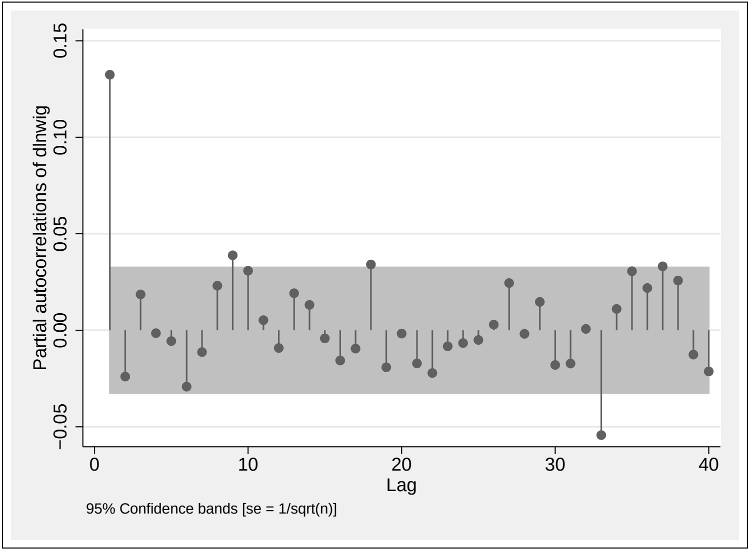
Czy zwrot z WIG jest białym szumem

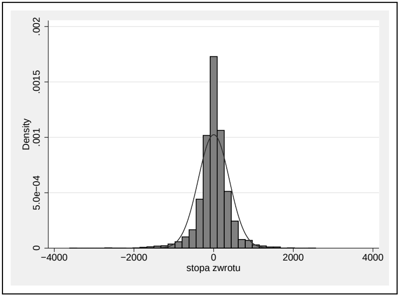
- test Ljunga-Boxa dla WIG

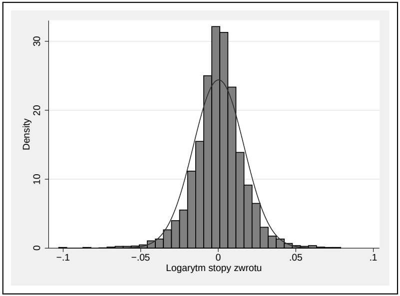
```
Portmanteau test for white noise
---------------------------------------
 Portmanteau (Q) statistic =   133.7683
 Prob > chi2(40)           =     0.0000
```

- Na podstawie wartości statystyki testowej wnioskujemy, że WIG nie zachowuje się jak biały szum


Autocorrelations of dlnwig
−0.05
0.00
0.05
0.10
0.15
0
10
20
30
40
Lag
Bartlett's formula for MA(q) 95% confidence bands


Partial autocorrelations of dlnwig
−0.05
0.00
0.05
0.10
0.15
0
10
20
30
40
Lag
95% Confidence bands [se = 1/sqrt(n)]


Density
0
5.0e−04
.001
.0015
.002
−4000
−2000
0
2000
4000
stopa zwrotu


Density
0
10
20
30
−.1
−.05
0
.05
.1
Logarytm stopy zwrotu

	stopa zwrotu	logarytm stopy zwrotu
Obs	3618	3618
Mean	3.904251	.0002526
Std. Dev.	389.6439	.0163453
Variance	151822.4	.0002672
Skewness	-.6254877	-.2051489
Kurtosis	10.68253	6.120451

- Zatem rozkład zwroty charakteryzuje się grubymi ogonami

- W sposób ogólny warunkową heteroscedastyczność definiuje się nastepująco

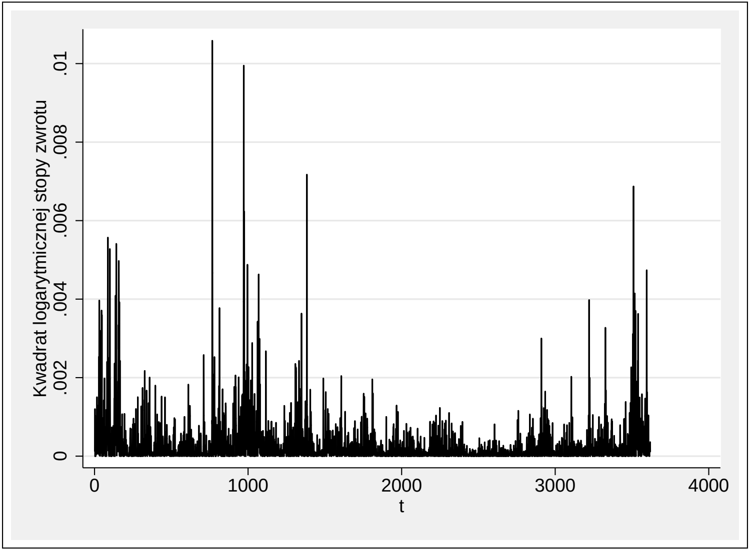
$$\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \varepsilon_{t-k}) \neq E(\varepsilon_t^2)$$

- W sposób ogólny warunkową heteroscedastyczność definiuje się nastepująco

$$\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \varepsilon_{t-k}) \neq E(\varepsilon_t^2)$$

- Najprostszym wariantem jest proces **A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroscedasticity

$$\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \varepsilon_{t-k}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2$$


Kwadrat logarytmicznej stopy zwrotu
0
.002
.004
.006
.008
.01
0
1000
2000
3000
4000
t

- Występowanie zjawiska warunkowej heteroscedastyczności reszt bada się testem ARCHLM

$$H_0 : \; E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon^2)$$

$$H_1 : \; E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \varepsilon_{t-k}) \neq E(\varepsilon^2)$$

- Występowanie zjawiska warunkowej heteroscedastyczności reszt bada się testem ARCHLM

$$H_0: \; E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon^2)$$

$$H_1: \; E(\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \varepsilon_{t-k}) \neq E(\varepsilon^2)$$

- statystyka testowa ma rozkład $\chi^2(k)$

- Procedura testowa przebiega następująco

- Procedura testowa przebiega następująco
  1. Szacujemy parametry modelu i reszty

- Procedura testowa przebiega następująco
  1. Szacujemy parametry modelu i reszty
  2. Reszty e podnosimy do kwadratu

- Procedura testowa przebiega następująco
  1. Szacujemy parametry modelu i reszty
  2. Reszty e podnosimy do kwadratu
  3. Szacujemy model autoregresyjny dla kwadratów reszt zapamiętując R_0^2

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q e_{t-q}^2$$

- Procedura testowa przebiega następująco
  1. Szacujemy parametry modelu i reszty
  2. Reszty e podnosimy do kwadratu
  3. Szacujemy model autoregresyjny dla kwadratów reszt zapamiętując R_0^2

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q e_{t-q}^2$$

  4. Testujemy łączną nieistotność parametrów $\alpha_1, \ldots \alpha_q$

- Procedura testowa przebiega następująco
  1. Szacujemy parametry modelu i reszty
  2. Reszty e podnosimy do kwadratu
  3. Szacujemy model autoregresyjny dla kwadratów reszt zapamiętując R_0^2

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q e_{t-q}^2$$

  4. Testujemy łączną nieistotność parametrów $\alpha_1, \ldots \alpha_q$
  5. W tym celu budujemy statystykę

$$ARCHLM = TR_0^2 \overset{a}{\sim} \chi^2(q)$$

```
. reg lnwig L.lnwig
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    3618
-------------+------------------------------           F(  1,  3616) =       .
       Model |  1096.49595     1  1096.49595           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .965847543  3616  .000267104           R-squared     =  0.9991
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9991
       Total |   1097.4618  3617  .303417694           Root MSE      =  .01634
------------------------------------------------------------------------------
       lnwig |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       lnwig |
         L1. |   .9993261   .0004932  2026.11   0.000     .9983591    1.000293
       _cons |   .0069187   .0048866     1.42   0.157    -.002662    .0164995
------------------------------------------------------------------------------
. estat archlm
LM test for autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)
---------------------------------------------------------------------------
    lags(p)  |          chi2               df                 Prob > chi2
-------------+-------------------------------------------------------------
       1     |        276.747               1                   0.0000
---------------------------------------------------------------------------
        H0: no ARCH effects      vs.  H1: ARCH(p) disturbance
```

ARCH

- Podstawowym modelem jest model ARCH(q).

$$
\begin{aligned}
y_t &= X_t\beta + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t \mid X_t) = 0 \\
\varepsilon_t &= u_t\sqrt{\theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^2} \qquad u_t \sim_{IID} \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}
$$

ARCH

- Podstawowym modelem jest model ARCH(q).

$$
\begin{aligned}
y_t &= X_t\beta + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t \mid X_t) = 0 \\
\varepsilon_t &= u_t\sqrt{\theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^2} \qquad u_t \sim_{IID} \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}
$$

- Pierwsze równanie opisuje średnią, drugie wariancję.

ARCH

- Równoważnym sposobem zapisu modelu jest

$$
\begin{aligned}
y_t &= X_t\beta + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t \mid X_t) = 0 \\
\varepsilon_t &= u_t\sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^2
\end{aligned}
$$

ARCH

- W modelu ARCH(q) warunkowa wariancja nie jest stała, ponieważ

$$\sigma_t^2 = \mathrm{var}(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \ldots \varepsilon_{t-q}) = (\theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2) var(u_t)$$

ARCH

- W modelu ARCH(q) warunkowa wariancja nie jest stała, ponieważ

$$\sigma_t^2 = \mathrm{var}(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \ldots \varepsilon_{t-q}) = (\theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2) var(u_t)$$

$$\sigma_t^2 = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2$$

ARCH

- W modelu ARCH(q) warunkowa wariancja nie jest stała, ponieważ

$$\sigma_t^2 = \mathrm{var}(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \ldots \varepsilon_{t-q}) = (\theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2) var(u_t)$$

$$\sigma_t^2 = \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2$$

- Pomimo tego wariancja bezwarunkowa jest stała, jeśli ε_t jest stacjonarnym procesem stochastycznym, ponieważ

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}) = \ldots = \mathrm{var}(\varepsilon_{t-q})$$

ARCH

- Przekształcając równanie warunkowej wariancji uzyskujemy

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^2)E(u_t^2) =$$

ARCH

- Przekształcając równanie warunkowej wariancji uzyskujemy

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^2)E(u_t^2) =$$

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \theta_0 + \theta_1\mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}^2) + \ldots + \theta_q\mathrm{var}(\varepsilon_{t-q}^2)$$

ARCH

- Przekształcając równanie warunkowej wariancji uzyskujemy

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^2)E(u_t^2) =$$

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \theta_0 + \theta_1\mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}^2) + \ldots + \theta_q\mathrm{var}(\varepsilon_{t-q}^2)$$

- wobec tego

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \frac{\theta_0}{1 - \theta_1 - \ldots - \theta_q} = \sigma^2$$

ARCH

- Przekształcając równanie warunkowej wariancji uzyskujemy

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2) E(u_t^2) =$$

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \theta_0 + \theta_1 \mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}^2) + \ldots + \theta_q \mathrm{var}(\varepsilon_{t-q}^2)$$

- wobec tego

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \frac{\theta_0}{1 - \theta_1 - \ldots - \theta_q} = \sigma^2$$

- gdzie σ^2 jest bezwarunkową wariancją

Szacowanie modelu ARCH

- MNK do równania średniej

Szacowanie modelu ARCH

- MNK do równania średniej
- MNK dla modelu autoregresyjnego dla reszt

Szacowanie modelu ARCH

- MNK do równania średniej
- MNK dla modelu autoregresyjnego dla reszt
- Dzięki temu uzyskuje się zgodne estymatory

Szacowanie modelu ARCH

- MNK do równania średniej
- MNK dla modelu autoregresyjnego dla reszt
- Dzięki temu uzyskuje się zgodne estymatory
- Estymatory efektywne otrzymuje się wykorzystując MNW

- Najważniejsza różnica między modelem regresji a ARCH polega na innym sposobie szacowania błędu prognozy

- Najważniejsza różnica między modelem regresji a ARCH polega na innym sposobie szacowania błędu prognozy
- Nieobciażoną prognozą dla y_{t+1} jest $X_{t+1}\hat{\beta}$

- Najważniejsza różnica między modelem regresji a ARCH polega na innym sposobie szacowania błędu prognozy
- Nieobciażoną prognozą dla y_{t+1} jest $X_{t+1}\hat{\beta}$
- Jej wariancja jest równa

$$\mathrm{var}(x_{T+1}b) = \sigma^2 x'_{T+1}(X'X)^{-1}x_{T+1} + \sigma^2$$

- Najważniejsza różnica między modelem regresji a ARCH polega na innym sposobie szacowania błędu prognozy
- Nieobciażoną prognozą dla y_{t+1} jest $X_{t+1}\hat{\beta}$
- Jej wariancja jest równa

$$\mathrm{var}(x_{T+1}b) = \sigma^2 x'_{T+1}(X'X)^{-1}x_{T+1} + \sigma^2$$

- dla składnika losowego zawierającego proces warunkowej heteroscedastyczności

$$\mathrm{var}(x_{T+1}b \mid \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-q}) = x'_{T+1}\sigma^2_{T+1}(X'X)^{-1}x_{T+1} + \sigma^2$$

gdzie

$$\sigma^2_{T+1} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 e^2_T + \ldots + \hat{\theta}_q e^2_{T-q+1}$$

```
ARCH family regression -- AR disturbances

Sample: 2 - 3619                                   Number of obs   =      3618
Distribution: Gaussian                             Wald chi2(1)    =     71.18
Log likelihood =  9946.637                         Prob > chi2     =    0.0000
------------------------------------------------------------------------------
             |                OPG
             |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
dlnwig       |
       _cons |    .000255   .0002659     0.96   0.338    -.0002661    .0007761
-------------+----------------------------------------------------------------
ARMA         |
          ar |
         L1. |   .1209841     .01434     8.44   0.000     .0928782      .14909
-------------+----------------------------------------------------------------
ARCH         |
        arch |
         L1. |   .3121721    .021704    14.38   0.000      .269633    .3547112
       _cons |    .000183   4.20e-06    43.61   0.000     .0001748    .0001912
------------------------------------------------------------------------------
```

GARCH

- Rozszerzenia podstawowego modelu

GARCH

- Rozszerzenia podstawowego modelu
- Specyfikacja ARCH wymaga nieujemności parametrów

GARCH

- Rozszerzenia podstawowego modelu
- Specyfikacja ARCH wymaga nieujemności parametrów
- Bardziej ogólną formą jest model GARCH(p,q)

$$
\begin{aligned}
y_t &= X_t\beta + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= u_t\sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_1\sigma_t^2 - 1 + \ldots + \alpha_p\sigma_{t-p}^2 + \theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^2
\end{aligned}
$$

GARCH

- Równanie wariancji składa się z części autoregresyjnej i części opisującej warunkową wariancję

GARCH

- Równanie wariancji składa się z części autoregresyjnej i części opisującej warunkową wariancję
- Model jest szacowany MNW

GARCH

- Równanie wariancji składa się z części autoregresyjnej i części opisującej warunkową wariancję
- Model jest szacowany MNW
- W praktyce ma on mniejszą liczbę parametrów niż model ARCH

```
ARCH family regression -- AR disturbances

Sample: 2 - 3619                                  Number of obs   =       3618
Distribution: Gaussian                            Wald chi2(1)    =      59.26
Log likelihood =  10212.72                        Prob > chi2     =     0.0000
------------------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
             |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
dlnwig       |
       _cons |   .0007063    .000257     2.75   0.006     .0002026      .00121
-------------+----------------------------------------------------------------
ARMA         |
          ar |
         L1. |   .1341403   .0174245     7.70   0.000     .0999889    .1682917
-------------+----------------------------------------------------------------
ARCH         |
        arch |
         L1. |   .0946308   .0060918    15.53   0.000      .082691    .1065705
       garch |
         L1. |   .8885389    .007568   117.41   0.000      .873706    .9033719
       _cons |   4.62e-06   7.64e-07     6.05   0.000     3.13e-06    6.12e-06
------------------------------------------------------------------------------
```

TARCH

- Asymetryczność zmian cen

TARCH

- Asymetryczność zmian cen
- Modelem uwzględniającym ten efekt jest TARCH

$$
\begin{aligned}
y_t &= X_t\beta + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= u_t\sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \begin{cases} \theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \\ \theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1}^\star + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}^\star \end{cases}
\end{aligned}
$$

```
ARCH family regression -- AR disturbances

Sample: 2 - 3619                                Number of obs    =      3618
Distribution: Gaussian                          Wald chi2(1)     =    206.11
Log likelihood =  10034.44                      Prob > chi2      =    0.0000
------------------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
             |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
dlnwig       |
       _cons |    .000522    .000286     1.82   0.068    -.0000386    .0010826
-------------+----------------------------------------------------------------
ARMA         |
          ar |
         L1. |   .1477242   .0102897    14.36   0.000     .1275566    .1678917
-------------+----------------------------------------------------------------
ARCH         |
       tarch |
         L1. |   .0456408   .0035855    12.73   0.000     .0386134    .0526683
       garch |
         L1. |   .9731957   .0022938   424.27   0.000     .9686999    .9776914
       _cons |   1.35e-06   2.92e-07     4.62   0.000     7.76e-07    1.92e-06
------------------------------------------------------------------------------
```

ARCH-in-Mean

- Pozwala on uwzględnić wpływ wariancji na wartość oczekiwaną

$$
\begin{aligned}
y_t &= X_t\beta + \delta\sigma_t^2 + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= u_t\sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \theta_0 + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}
\end{aligned}
$$

Diagnostyka

- Diagnostyka nie odbiega od standardowej diagnostyki modelu regresji

Diagnostyka

- Diagnostyka nie odbiega od standardowej diagnostyki modelu regresji
- Równanie średniej polega standardowej procedurze diagnostycznej

Diagnostyka

- Diagnostyka nie odbiega od standardowej diagnostyki modelu regresji
- Równanie średniej polega standardowej procedurze diagnostycznej
- Testem poprawności specyfikacji modelu jest test normalności reszt oraz zbadanie występowania efektów ARCH w resztach

- Prawdopodobieństwo poniesienia wysokiej straty

- Prawdopodobieństwo poniesienia wysokiej straty

Wartość narażona na ryzyko

Dla danego poziomu prawdopodobieństwa α jest to strata jaka może się zdażyć z prawdopodobieństwem α

$$Pr(L_j > J_t) = 1 - Pr(L_j < J_t) = 1 - F(J_t) = \alpha$$

J_t jest wartością narażoną na ryzyko.

VaR dla WIG

- Stopa zwrotu jest dana przez

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

VaR dla WIG

- Stopa zwrotu jest dana przez

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

- Bank inwestuje Q jednostek

VaR dla WIG

- Stopa zwrotu jest dana przez

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

- Bank inwestuje Q jednostek
- Zmiana ceny funduszu wynosi

$$P_t - P_{t-1} = P_{t-1}[\exp(r_t) - 1]$$

VaR dla WIG

- Stopa zwrotu jest dana przez

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

- Bank inwestuje Q jednostek
- Zmiana ceny funduszu wynosi

$$P_t - P_{t-1} = P_{t-1}[\exp(r_t) - 1]$$

- Zatem wynik inwestycji netto jest równy

$$L_t = Q\Delta P_t = QP_{t-1}[\exp(r_t) - 1]$$

VaR dla WIG

- VaR wynosi

$$Pr(L_j < J_t) = Pr(QP_{t-1}[\exp(r_t) - 1] < J_t)$$

$$Pr(L_j < J_t) = Pr(r_t < \underbrace{\ln(1 + \frac{J_t}{QP_{t-1}})}_{k_t})$$

VaR dla WIG

- VaR wynosi

$$Pr(L_j < J_t) = Pr(QP_{t-1}[\exp(r_t) - 1] < J_t)$$

$$Pr(L_j < J_t) = Pr(r_t < \underbrace{\ln(1 + \frac{J_t}{QP_{t-1}})}_{k_t})$$

- Wystarczy znaleźć k_t

$$Pr(r_t < k_t) = Pr(\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}) = Pr(u_t < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t})$$

$$Pr(r_t < k_t) = Pr(u_t < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}) = F(\frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}) = 1 - \alpha$$

VaR dla WIG

- VaR wynosi

$$Pr(L_j < J_t) = Pr(QP_{t-1}[\exp(r_t) - 1] < J_t)$$

$$Pr(L_j < J_t) = Pr(r_t < \underbrace{\ln(1 + \frac{J_t}{QP_{t-1}})}_{k_t})$$

- Wystarczy znaleźć k_t

$$Pr(r_t < k_t) = Pr(\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}) = Pr(u_t < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t})$$

$$Pr(r_t < k_t) = Pr(u_t < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}) = F(\frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}) = 1 - \alpha$$

- Zatem

$$k_t = \mu_t + F^{-1}(1 - \alpha)\sigma_t$$