

Integracja

Słaba stacjonarność

Szereg czasowy nazywamy słabo (wariancyjnie) stacjonarnym jeżeli:

Słaba stacjonarność

Szereg czasowy nazywamy słabo (wariancyjnie) stacjonarnym jeżeli:

- 1 wartość oczekiwana szeregu jest skończona i stała w czasie

$$E(y_t) = \mu < \infty$$

Słaba stacjonarność

Szereg czasowy nazywamy słabo (wariancyjnie) stacjonarnym jeżeli:

- 1 wartość oczekiwana szeregu jest skończona i stała w czasie

$$E(y_t) = \mu < \infty$$

- 2 wariancja szeregu jest skończona i stała w czasie

$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2 < \infty$$

Słaba stacjonarność

Szereg czasowy nazywamy słabo (wariancyjnie) stacjonarnym jeżeli:

- 1 wartość oczekiwana szeregu jest skończona i stała w czasie

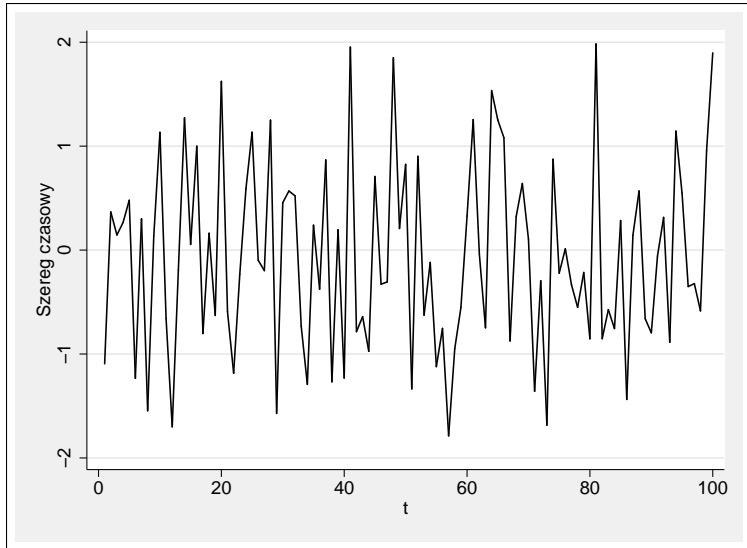
$$E(y_t) = \mu < \infty$$

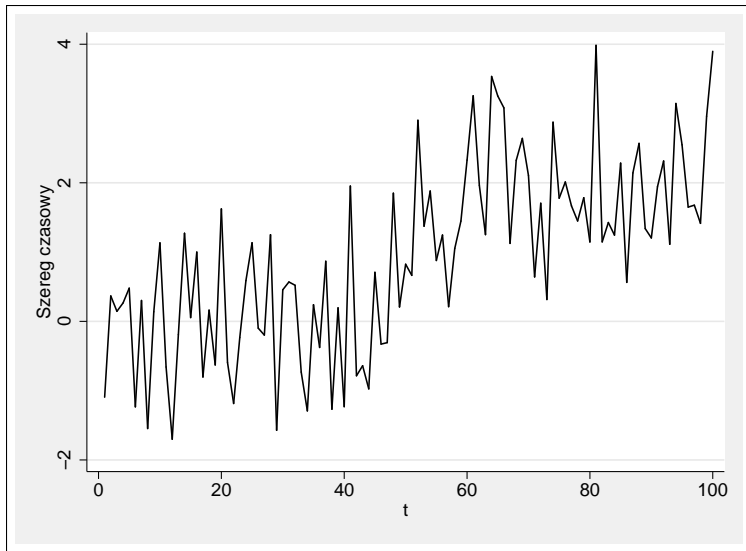
- 2 wariancja szeregu jest skończona i stała w czasie

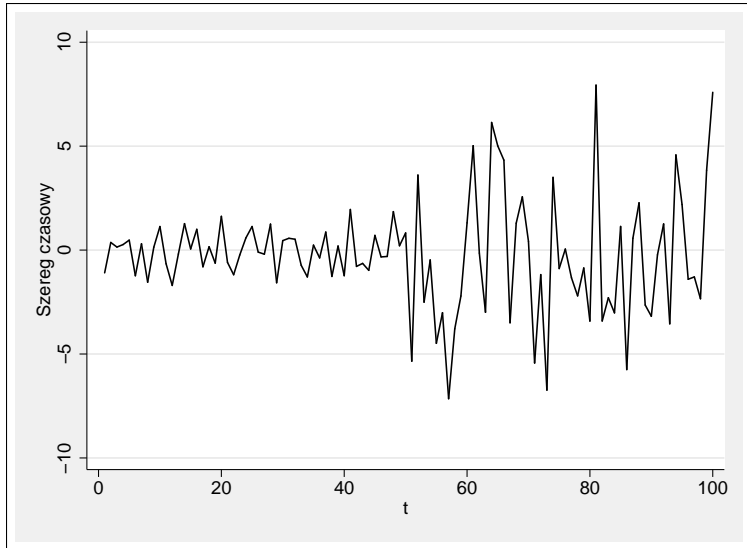
$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2 < \infty$$

- 3 kowariancja między realizacjami nie zależy od czasu i jest jedynie funkcją odległości między obserwacjami

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}(y_{t'}, y_{t'+h}) = \gamma_h \quad \forall t, t', h$$





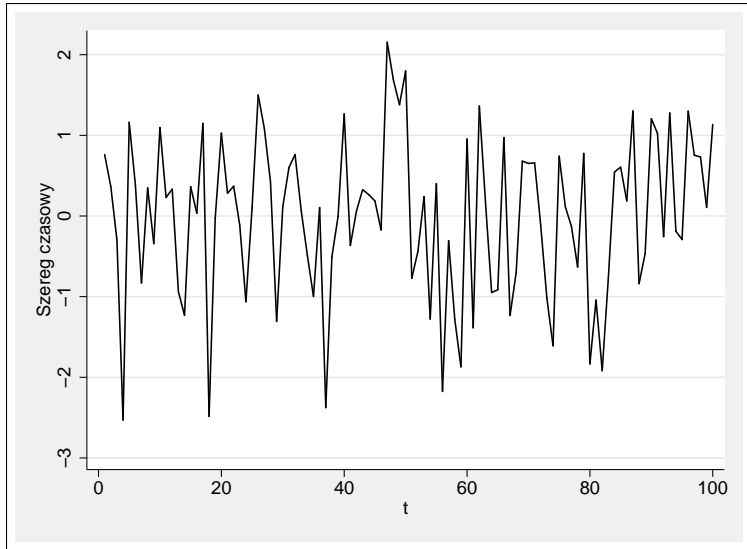


- Proces białego szumu ma następujące własności:

- Proces białego szumu ma następujące własności:
- $E(y_t) = \mu \quad \forall t$

- Proces białego szumu ma następujące własności:
- $E(y_t) = \mu \quad \forall t$
- $\text{var}(y_t) = \sigma^2 \quad \forall t$

- Proces białego szumu ma następujące własności:
- $E(y_t) = \mu \quad \forall t$
- $\text{var}(y_t) = \sigma^2 \quad \forall t$
- $\text{cov} = \begin{cases} \sigma^2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$



- Proces AR(1) dany jest wzorem

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Proces AR(1) dany jest wzorem

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Jest on stacjonarny dla $|\rho| < 1$

- Proces AR(1) dany jest wzorem

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Jest on stacjonarny dla $|\rho| < 1$
- Dowód stacjonarności.

- Proces AR(1) dany jest wzorem

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Jest on stacjonarny dla $|\rho| < 1$
- Dowód stacjonarności.
- Zapiszmy równanie dla $t - 1$

$$y_{t-1} = \rho y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Proces AR(1) dany jest wzorem

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Jest on stacjonarny dla $|\rho| < 1$
- Dowód stacjonarności.
- Zapiszmy równanie dla $t - 1$

$$y_{t-1} = \rho y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

- Podstawiając do wzoru na AR(1) uzyskujemy

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t = \rho \rho y_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Podstawiając rekurencyjnie uzyskamy

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$$

- Podstawiając rekurencyjnie uzyskamy

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$$

- Wobec tego

$$E(y_t) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i} \underbrace{E(\varepsilon_{t-i})}_0 = 0$$

- Podstawiając rekurencyjnie uzyskamy

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$$

- Wobec tego

$$E(y_t) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i} \underbrace{E(\varepsilon_{t-i})}_0 = 0$$

$$\text{var}(y_t) = \text{var}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{2i} \underbrace{\text{var}(\varepsilon_{t-i})}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i-h}\right)$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i-h}\right)$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \rho^h \varepsilon_{t-i-h}, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i-h}\right)$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i-h}\right)$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \rho^h \varepsilon_{t-i-h}, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i-h}\right)$$

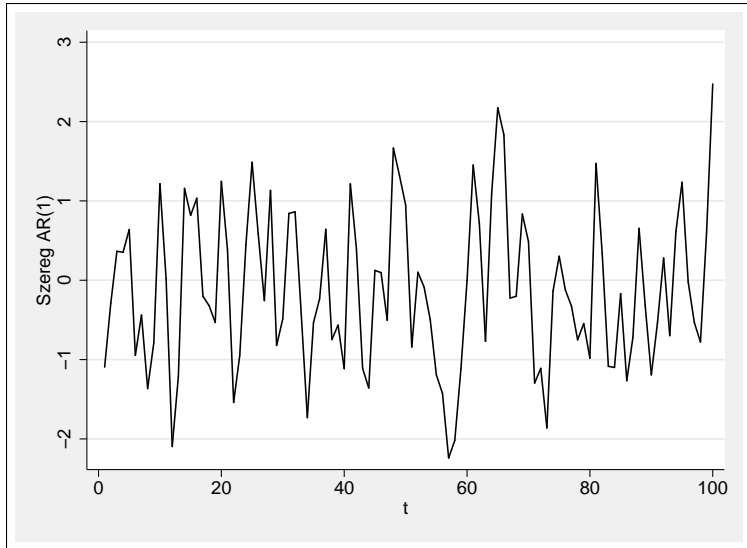
$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \rho^h \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{2i} \text{var}(\varepsilon_{t-i-h}) = \rho^h \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i-h}\right)$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \rho^h \varepsilon_{t-i-h}, \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i-h}\right)$$

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \rho^h \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{2i} \text{var}(\varepsilon_{t-i-h}) = \rho^h \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}$$

- W obliczeniach założono, że $|\rho| < 1$. Jest ono konieczne do udowodnienia stacjonarności



Szereg trendostacjonarny

Szereg czasowy nazywamy trendostacjonarnym, gdy szereg odchyleń jego wartości od trendu jest szeregiem stacjonarnym

$$y_t - E(y_t)$$

- Niech

$$y_t = \beta_0 + \beta t + \varepsilon_t$$

- Niech

$$y_t = \beta_0 + \beta t + \varepsilon_t$$

- wobec tego $E(y_t) = \beta_0 + \beta t$

- Niech

$$y_t = \beta_0 + \beta t + \varepsilon_t$$

- wobec tego $E(y_t) = \beta_0 + \beta t$
- a $y_t - E(y_t) = \varepsilon_t$

Twierdzenie Wolda

Jeżeli proces stochastyczny y_t jest słabo stacjonarny to można go przedstawić jako sumę procesu deterministycznego i procesu $MA(\infty)$

$$y_t = E(y_t \mid y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

- Przykładem procesu niestacjonarnego jest błądzenie przypadkowe

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Przykładem procesu niestacjonarnego jest błądzenie przypadkowe

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Podstawiając $y_{t-1} = y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$ otrzymujemy

$$y_t = y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Przykładem procesu niestacjonarnego jest błądzenie przypadkowe

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

- Podstawiając $y_{t-1} = y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$ otrzymujemy

$$y_t = y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Powtarzając czynność rekurencyjnie uzyskujemy

$$y_t = y_0 + \sum_{i=0}^t \varepsilon_i$$

- zatem y_t jest sumą niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie

- zatem y_t jest sumą niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie
- $E(y_t) = y_0 < \infty$

- zatem y_t jest sumą niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie
- $E(y_t) = y_0 < \infty$
- ale

$$\text{var}(y_t) = \text{var}(y_0 + \sum_{i=0}^t \varepsilon_i) = \sum_{i=0}^t \text{var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2$$

- zatem y_t jest sumą niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie
- $E(y_t) = y_0 < \infty$
- ale

$$\text{var}(y_t) = \text{var}\left(y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=0}^{t-1} \text{var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2$$

- oraz

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \sum_{i=1}^{t-h} \text{var}(\varepsilon_i) = (t-h)\sigma^2$$

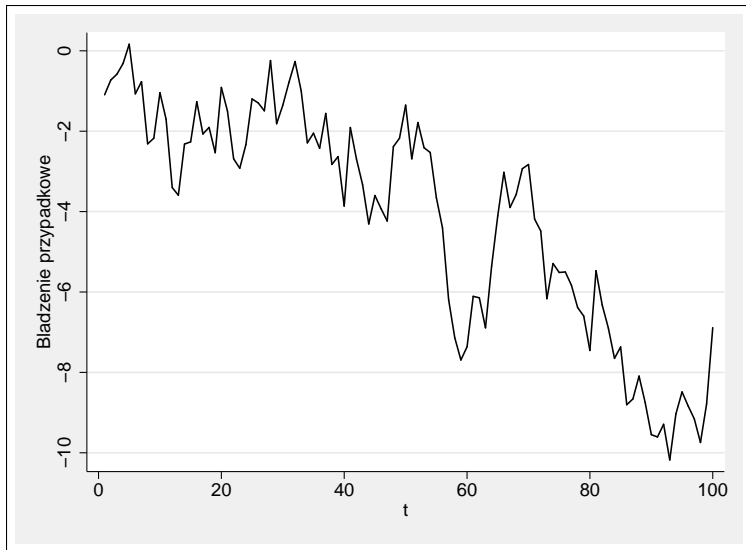
- zatem y_t jest sumą niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie
- $E(y_t) = y_0 < \infty$
- ale

$$\text{var}(y_t) = \text{var}(y_0 + \sum_{i=0}^t \varepsilon_i) = \sum_{i=0}^t \text{var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2$$

- oraz

$$\text{cov}(y_t, y_{t+h}) = \sum_{i=1}^{t-h} \text{var}(\varepsilon_i) = (t-h)\sigma^2$$

- zatem wariancja i kowariancja zależą od czasu



- Jeżeli od procesu błądzenia przypadkowego odejmiemy y_{t-1} z obu stron uzyskamy

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

- Jeżeli od procesu błędzenia przypadkowego odejmiemy y_{t-1} z obu stron uzyskamy

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

- Taki proces będziemy nazywać procesem zintegrowanym

- Jeżeli od procesu błądzenia przypadkowego odejmiemy y_{t-1} z obu stron uzyskamy

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

- Taki proces będziemy nazywać procesem zintegrowanym
- Procesy stacjonarne nazywa się procesami zintegrowanymi rzędu 0 i oznacza $I(0)$

- Jeżeli od procesu błądzenia przypadkowego odejmiemy y_{t-1} z obu stron uzyskamy

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

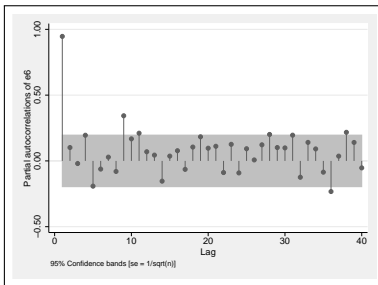
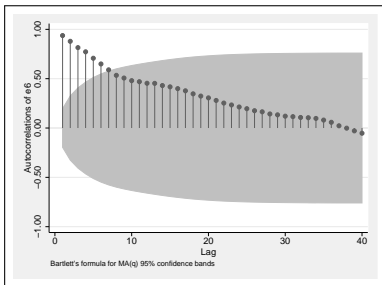
- Taki proces będziemy nazywać procesem zintegrowanym
- Procesy stacjonarne nazywa się procesami zintegrowanymi rzędu 0 i oznacza $I(0)$
- Proces który do d -krotnym różnicowaniu jest stacjonarny nazywamy zróżnicowanym stopnia d i oznaczamy $I(d)$

- Znaczenie szeregów $I(1)$ w ekonomii

- Znaczenie szeregów $I(1)$ w ekonomii
- Szeregi $I(2)$ są stosowane do modelowania hiperinflacji

- Znaczenie szeregów $I(1)$ w ekonomii
- Szeregi $I(2)$ są stosowane do modelowania hiperinflacji
- Szeregi o wyższym stopniu integracji nie mają zastosowań w ekonomii

- Znaczenie szeregów $I(1)$ w ekonomii
- Szeregi $I(2)$ są stosowane do modelowania hiperinflacji
- Szeregi o wyższym stopniu integracji nie mają zastosowań w ekonomii
- Dla szeregu zintegrowanego funkcje ACF i PACF mają charakterystyczny przebieg



- Chcemy zbadać czy zmienna jest stacjonarna

- Chcemy zbadać czy zmienna jest stacjonarna
- Zapisujemy model w postaci AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2) \quad (1)$$

- jeżeli $\rho = 1$ to y_t jest błędzeniem przypadkowym

- Chcemy zbadać czy zmienna jest stacjonarna
- Zapisujemy model w postaci AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2) \quad (1)$$

- jeżeli $\rho = 1$ to y_t jest błędzeniem przypadkowym
- jeżeli $|\rho| < 1$ to y_t jest stacjonarny

- Chcemy zbadać czy zmienna jest stacjonarna
- Zapisujemy model w postaci AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2) \quad (1)$$

- jeżeli $\rho = 1$ to y_t jest błędzeniem przypadkowym
- jeżeli $|\rho| < 1$ to y_t jest stacjonarny
- H_0 : y_t jest niestacjonarny
- H_1 : y_t jest stacjonarny

- Chcemy zbadać czy zmienna jest stacjonarna
- Zapisujemy model w postaci AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2) \quad (1)$$

- jeżeli $\rho = 1$ to y_t jest błędzeniem przypadkowym
- jeżeli $|\rho| < 1$ to y_t jest stacjonarny
- H_0 : y_t jest niestacjonarny
- H_1 : y_t jest stacjonarny
- dla $|\rho| > 1$ to y_t jest eksplozywny

- Jeżeli od (1) odejmiemy y_{t-1} z obu stron to

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Jeżeli od (1) odejmiemy y_{t-1} z obu stron to

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Zatem aby przeprowadzić test wystarczy przeprowadzić regresję zmiennej zróżnicowanej na jej wartość opóźnioną

- Ale przy prawdziwej H_0 y_t jest zmienną niestacjonarną

- Ale przy prawdziwej H_0 y_t jest zmienną niestacjonarną
- Zatem statystyka testowa nie ma rozkładu t -Studenta

- Ale przy prawdziwej H_0 y_t jest zmienną niestacjonarną
- Zatem statystyka testowa nie ma rozkładu t -Studenta
- Dickey i Fuller wyprowadzili wartości krytyczne testu

- Ale przy prawdziwej H_0 y_t jest zmienną niestacjonarną
- Zatem statystyka testowa nie ma rozkładu t -Studenta
- Dickey i Fuller wyprowadzili wartości krytyczne testu
- Aby procedura była prawidłowa składnik losowy nie może podlegać autokorelacji

- Rozszerzenie polega na uwzględnieniu po prawej stronie równania opóźnionych wartości zmiennej zależnej

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- Rozszerzenie polega na uwzględnieniu po prawej stronie równania opóźnionych wartości zmiennej zależnej

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- stała k to najmniejsza liczba przy której reszty nie podlegają autokorelacji

- Rozszerzenie polega na uwzględnieniu po prawej stronie równania opóźnionych wartości zmiennej zależnej

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- stała k to najmniejsza liczba przy której reszty nie podlegają autokorelacji
- test przeprowadza się w sposób analogiczny do testu DF

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 131

	----- Interpolated Dickey-Fuller -----			
Test Statistic	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-3.766	-3.500	-2.888	-2.578

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0033

- Test KPSS ma hipotezy zapisane w sposób "tradycyjny"

- Test KPSS ma hipotezy zapisane w sposób "tradycyjny"
- H_0 : y_t jest stacjonarny
- H_1 : y_t jest niestacjonarny

KPSS test for inflacja

Maxlag = 12 chosen by Schwert criterion
Autocovariances weighted by Bartlett kernel

Critical values for H0: inflacja is trend stationary

10%: 0.119 5% : 0.146 2.5%: 0.176 1% : 0.216

Lag order	Test statistic
0	2.73
1	1.4
2	.951
3	.728
4	.595
5	.507
6	.444
7	.397
8	.361
9	.332
10	.309
11	.289
12	.273

Eksperyment Newbolda-Davisa

- Generujemy obserwacje dla dwóch niezależnych zmiennych

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_{t1} \quad \varepsilon_{t1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_{t2} \quad \varepsilon_{t2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}) = 0$$

Eksperyment Newbolda-Davisa

- Generujemy obserwacje dla dwóch niezależnych zmiennych

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_{t1} \quad \varepsilon_{t1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_{t2} \quad \varepsilon_{t2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}) = 0$$

- Szacujemy parametry regresji ε_{t1} na ε_{t2} oraz y_t na x_t

Eksperyment Newbolda-Davisa

- Generujemy obserwacje dla dwóch niezależnych zmiennych

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_{t1} \quad \varepsilon_{t1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_{t2} \quad \varepsilon_{t2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}) = 0$$

- Szacujemy parametry regresji ε_{t1} na ε_{t2} oraz y_t na x_t
- zapamiętujemy statystykę t oraz DW dla każdej regresji

Eksperyment Newbolda-Davisa

- Generujemy obserwacje dla dwóch niezależnych zmiennych

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_{t1} \quad \varepsilon_{t1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_{t2} \quad \varepsilon_{t2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}) = 0$$

- Szacujemy parametry regresji ε_{t1} na ε_{t2} oraz y_t na x_t
- zapamiętujemy statystykę t oraz DW dla każdej regresji
- powtarzamy dużą liczbę razy np. 1000

	teoretyczne	ε_{t1} na ε_{t2}	y na x
średnia	0,000	0,0036	0,0048
5% percentyl	1,677	1,564	8,293
% istotnych	5	4,33	63,24
DW	2,00	2,01	0,33

- Zignorowanie zjawiska regresji pozornej może prowadzić do zbudowania błędnego modelu

- Zignorowanie zjawiska regresji pozornej może prowadzić do zbudowania błędnego modelu
- Aby temu zapobiec można różnicować zmienne

- Zignorowanie zjawiska regresji pozornej może prowadzić do zbudowania błędnego modelu
- Aby temu zapobiec można różnicować zmienne
- Ale różnicowanie powoduje utratę informacji i uniemożliwia wyznaczenie relacji długookresowej