Modele dynamiczne

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie
- Najważniejszymi zastosowaniami modeli dynamicznych są

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie
- Najważniejszymi zastosowaniami modeli dynamicznych są
  - badanie procesu dochodzenia do równowagi długookresowej

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie
- Najważniejszymi zastosowaniami modeli dynamicznych są
  - badanie procesu dochodzenia do równowagi długookresowej
  - istnienie takiej równowagi

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie
- Najważniejszymi zastosowaniami modeli dynamicznych są
  - badanie procesu dochodzenia do równowagi długookresowej
  - istnienie takiej równowagi
  - szybkość dostosowań w obliczu szoków egzogenicznych

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie
- Najważniejszymi zastosowaniami modeli dynamicznych są
  - badanie procesu dochodzenia do równowagi długookresowej
  - istnienie takiej równowagi
  - szybkość dostosowań w obliczu szoków egzogenicznych
  - dodatkowo modele dynamiczne można wykorzystać do

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie
- Najważniejszymi zastosowaniami modeli dynamicznych są
  - badanie procesu dochodzenia do równowagi długookresowej
  - istnienie takiej równowagi
  - szybkość dostosowań w obliczu szoków egzogenicznych
  - dodatkowo modele dynamiczne można wykorzystać do
    - budowania prognoz

- Modele dynamiczne opisują kształtowanie się zjawiska w czasie
- Najważniejszymi zastosowaniami modeli dynamicznych są
  - badanie procesu dochodzenia do równowagi długookresowej
  - istnienie takiej równowagi
  - szybkość dostosowań w obliczu szoków egzogenicznych
  - dodatkowo modele dynamiczne można wykorzystać do
    - budowania prognoz
    - objaśniania dynamiki zmiennej zależnej

Szereg czasowy - definicja nieformalna

Proces stochastyczny jest to zbiór ścieżek możliwych realizacji zmiennej losowej. Każdą pojedynczą ścieżkę nazywamy szeregiem czasowym

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$$

Model DL

- Wpływ zmiennych niezależnych na zmienną zależną jest rozłożony w czasie

Model DL

- Wpływ zmiennych niezależnych na zmienną zależną jest rozłożony w czasie
- Budując model zjawiska uwzględnia się nie tylko bieżące wartości zmiennej objaśniającej, ale również jej opóźnione wartości

Model DL

- Model DL może spełniać założenia KRML

Model DL

- Model DL może spełniać założenia KRML
- Model DL ma następującą postać

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon$$

Model DL

- Model DL może spełniać założenia KRML
- Model DL ma następującą postać

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon$$

- Jeżeli zmienne objaśniające są nielosowe i składnik losowy modelu nie podlega autokorelacji to model DL spełnia założenia KMRL

Szacowana jest zależność miedzy zmianą stopy bezrobocia (U) a zmianą poziomu cen (inflacja) na podstawie danych miesięcznych dla Polski

$$\Delta inflacja_t = c + \beta_0 \Delta U_t + \beta_1 \Delta U_{t-1} + \beta_2 \Delta U_{t-2}$$

$$+\beta_3 \Delta U_{t-3} + \beta_4 \Delta U_{t-4} + \varepsilon_t$$

```
  Source |       SS       df       MS              Number of obs =     128
---------+------------------------------           F(  5,   122) =   20.05
   Model |  844.535344     5  168.907069           Prob > F      =  0.0000
Residual |  1027.63908   122  8.42327113           R-squared     =  0.4511
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4286
   Total |  1872.17442   127  14.7415309           Root MSE      =  2.9023
-------------------------------------------------------------------
inflacja |      Coef.  Std. Err.      t    P>|t|
---------+---------------------------------------------------------
   stopa |
     --. |   4.460899  1.194171     3.74   0.000
     L1. |  -5.479456  2.551726    -2.15   0.034
     L2. |   .5970146  2.850079     0.21   0.834
     L3. |   4.454998  2.565207     1.74   0.085
     L4. |  -4.647815  1.215513    -3.82   0.000
   _cons |   14.64427  1.332817    10.99   0.000
-------------------------------------------------------------------
```

- Parametrów modelu DL nie można interpretować tak jak parametrów modelu regresji, bowiem jednostkowa zmiana wartości zmiennej w kolejnym okresie powoduje zmianę wartości opóźnienia zmiennej

- Parametrów modelu DL nie można interpretować tak jak parametrów modelu regresji, bowiem jednostkowa zmiana wartości zmiennej w kolejnym okresie powoduje zmianę wartości opóźnienia zmiennej
- W związku z tym interpretowany jest rozmiar natychmiastowej reakcji na szok, oraz efekt długookresowy.

Mnożnik bezpośredni

- Opisuje natychmiastową reakcję modelu na szok i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p}$$

Mnożnik bezpośredni

- Opisuje natychmiastową reakcję modelu na szok i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p}$$

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + \beta_0 \Delta x$$

Mnożnik bezpośredni

- Opisuje natychmiastową reakcję modelu na szok i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p}$$

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + \beta_0 \Delta x$$

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

Mnożnik bezpośredni

- Opisuje natychmiastową reakcję modelu na szok i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p}$$

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p} + \beta_0 \Delta x$$

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

Zatem mnożnik jest równy

$$\frac{E(\Delta y)}{\Delta x} = \beta_0$$

Mnożnik skumulowany

- opisuje reakcję y na zmianę x w τ kolejnych okresach i wynosi

$$E(y_t+\Delta y) = \mu+\beta_0(x_t+\Delta x)+\ldots+\beta_\tau(x_{t-\tau}+\Delta x)+\ldots+\beta_p x_{t-p}$$

Mnożnik skumulowany

- opisuje reakcję y na zmianę x w τ kolejnych okresach i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \ldots + \beta_\tau(x_{t-\tau} + \Delta x) + \ldots + \beta_p x_{t-p}$$

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i \Delta x$$

Mnożnik skumulowany

- opisuje reakcję y na zmianę x w τ kolejnych okresach i wynosi

$$E(y_t+\Delta y) = \mu+\beta_0(x_t+\Delta x)+\ldots+\beta_\tau(x_{t-\tau}+\Delta x)+\ldots+\beta_p x_{t-p}$$

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i \Delta x$$

Zatem mnożnik jest równy

$$\frac{E(\Delta y)}{\Delta x} = \sum_{s=0}^{\tau} \beta_s$$

Mnożnik długookresowy

- Opisuje reakcję y na zmianę jednostkową wszystkich zmiennych niezależnych x

Mnożnik długookresowy

- Opisuje reakcję y na zmianę jednostkową wszystkich zmiennych niezależnych x
- Jest on równy

$$\frac{E(\Delta y)}{\Delta x} = \beta = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s$$

Średnie opóźnienie

- Opisuje czas, w którym realizuje się połowa efektu trwałej zmiany zmiennej niezależnej x

$$\bar{w} = \sum_{s=0}^{\infty} s \frac{\beta_s}{\beta}$$

Przykład

- Mnożnik bezpośredni jest równy 4,46. Zatem 1% wzrost stopy bezrobocia powoduje wzrost inflacji o 4,46 punktu procentowego.

Przykład

- Mnożnik bezpośredni jest równy 4,46. Zatem 1% wzrost stopy bezrobocia powoduje wzrost inflacji o 4,46 punktu procentowego.
- Mnożnik długookresowy jest równy $\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s = -0{,}62$. Efektem długookresowym wzrostu bezrobocia jest spadek inflacji o 0,6 punktu procentowego.

Model ARDL

- Tak jak w przypadku modelu DL, wpływ zmiennych niezależnych na zmienną zależną jest rozłożony w czasie

Model ARDL

- Tak jak w przypadku modelu DL, wpływ zmiennych niezależnych na zmienną zależną jest rozłożony w czasie
- Budując model zjawiska uwzględnia się nie tylko bieżące wartości zmiennej objaśniającej, ale również jej opóźnione wartości oraz opóźnione wartości zmiennej objaśnianej

Model ARDL

- Model ARDL zazwyczaj nie spełnia założeń KRML

Model ARDL

- Model ARDL zazwyczaj nie spełnia założeń KRML
- Model ARDL ma następującą postać

$$y_t = \underbrace{\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_q y_{t-q}}_{AR} +$$

$$+ \underbrace{\mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_p x_{t-p}}_{DL} + \varepsilon$$

```
  Source |       SS       df       MS              Number of obs =      130
---------+------------------------------           F(  4,   125) = 5629.97
   Model |  2096.93345     4  524.233362           Prob > F      =  0.0000
Residual |   11.639349   125  .093114792           R-squared     =  0.9945
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9943
   Total |   2108.5728   129  16.3455256           Root MSE      =  .30515
---------------------------------------------------------------------------
inflacja |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|
---------+-----------------------------------------------------------------
inflacja |
     L1. |   1.197919   .0812572    14.74   0.000
     L2. |   -.226384   .0788832    -2.87   0.005
   stopa |
     --. |  -.1940366   .0888325    -2.18   0.031
     L1. |   .1763992   .0909853     1.94   0.055
   _cons |   .3445489   .1695239     2.03   0.044
---------------------------------------------------------------------------
```

Stan równowagi

$$y^{\star} = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \ldots = E(y_{t-q})$$

Stan równowagi

$$y^\star = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \ldots = E(y_{t-q})$$

$$x^\star = x_t = x_{t-1} = \ldots = x_{t-p}$$

Stan równowagi

$$y^\star = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \ldots = E(y_{t-q})$$

$$x^\star = x_t = x_{t-1} = \ldots = x_{t-p}$$

wstawiając $y^\star$ oraz $x^\star$ do postaci modelu ARDL

$$(1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_q)y^\star = \mu + \beta_0 x^\star + \beta_1 x^\star + \ldots + \beta_p x^\star$$

Stan równowagi

- równowaga zachodzi przy

$$y^\star = \mu^\star + \beta x^\star$$

gdzie

$$\mu^\star = \frac{\mu}{1 - \sum \alpha_i}$$

$$\beta = \frac{\sum \beta_i}{1 - \sum \alpha_i}$$

Przykład

Stopa inflacji w długim okresie dąży do poziomu

$$y^\star = \mu^\star + \beta x^\star = \frac{0{,}345}{1 - 0{,}960} - \frac{{,}018}{1 - 0{,}960} x^\star$$

$$y^\star = 8.625 - 0.450 x^\star$$

Przy 10 % bezrobociu stopa inflacji wg modelu powinna wynosić 4,125 %.

Równowaga długookresowa ARDL

Model ARDL posiada równowagę długookresową, gdy jego część autoregresyjna jest opisana procesem stacjonarnym

Mnożnik bezpośredni

- Opisuje natychmiastową reakcję modelu na szok i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

Mnożnik bezpośredni

- Opisuje natychmiastową reakcję modelu na szok i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

- Zatem mnożnik jest równy

$$\frac{E(\Delta y)}{\Delta x} = \beta_0$$

Mnożnik bezpośredni

- Opisuje natychmiastową reakcję modelu na szok i wynosi

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

- Zatem mnożnik jest równy

$$\frac{E(\Delta y)}{\Delta x} = \beta_0$$

- Postać mnożnika jest identyczna jak w przypadku modelu DL

Mnożnik długookresowy

- Inaczej jest w przypadku mnożnika długookresowego

$$y^\star = \mu^\star + x^\star \beta$$

Mnożnik długookresowy

- Inaczej jest w przypadku mnożnika długookresowego

$$y^\star = \mu^\star + x^\star \beta$$

- po dodaniu Δ uzyskujemy

$$y^\star + E(\Delta y) = \mu^\star + (x^\star + \Delta x)\beta$$

Mnożnik długookresowy

- Inaczej jest w przypadku mnożnika długookresowego

$$y^\star = \mu^\star + x^\star \beta$$

- po dodaniu Δ uzyskujemy

$$y^\star + E(\Delta y) = \mu^\star + (x^\star + \Delta x)\beta$$

- odejmując stronami uzyskujemy

$$E(\Delta y) = \Delta x \beta$$

Mnożnik długookresowy

- Inaczej jest w przypadku mnożnika długookresowego

$$y^\star = \mu^\star + x^\star \beta$$

- po dodaniu Δ uzyskujemy

$$y^\star + E(\Delta y) = \mu^\star + (x^\star + \Delta x)\beta$$

- odejmując stronami uzyskujemy

$$E(\Delta y) = \Delta x \beta$$

- zatem mnożnik długookresowy wynosi

$$\beta = \frac{\sum \beta_i}{1 - \sum \alpha_i}$$

- zmienne objaśniające **są losowe**, ponieważ dla losowego y_t jego opóźnione wartości są losowe

- zmienne objaśniające **są losowe**, ponieważ dla losowego y_t jego opóźnione wartości są losowe
- do wykazania zgodności niezbędne jest założenie $cov(x_t, \varepsilon_t) = 0$

- Niech

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Niech

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- załóżmy, że $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho$, oraz $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0 \; \forall s > 1$

- Niech
$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$
- załóżmy, że $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho$, oraz $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0 \ \forall s > 1$
- wobec tego
$$y_{t-1} = \alpha y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

- Obliczmy kowariancję y_t oraz ε_{t-1}

$$cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = cov(\alpha y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)$$

- Obliczmy kowariancję y_t oraz ε_{t-1}

$$cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = cov(\alpha y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)$$

$$cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = \alpha \underbrace{cov(y_{t-2}, \varepsilon_t)}_{0} + cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) = \rho$$

- Obliczmy kowariancję y_t oraz ε_{t-1}

$$cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = cov(\alpha y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)$$

$$cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) = \alpha \underbrace{cov(y_{t-2}, \varepsilon_t)}_{0} + cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) = \rho$$

- zatem zmienne objaśniające są skorelowane ze składnikiem losowym

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	0.995	1	0.3184
2	1.068	2	0.5863
3	1.511	3	0.6798
4	1.522	4	0.8227