Czasowy wymiar danych

Problem autokorelacji

Model regresji dla szeregów czasowych

- Model regresji dla szeregów czasowych

$$y_t = X_t\beta + \varepsilon_t$$

- Zasadnicze różnice
  1. Budowa prognoz
  2. Problem stabilności parametrów
  3. Problem autokorelacji

Prognoza

Przez prognozę z modelu rozumiemy przewidywaną przez model wartość $\hat{y}_f$ dla znanego wektora zmiennych objaśniających x_f.

- $\hat{y}_f = x_f b$ jest nieobciążoną prognozą wartości y_f.
- Błąd prognozy wynosi $e_f = \hat{y}_f - y_f$.
- Wartość oczekiwana błędu prognozy wynosi 0, ponieważ

$$E(e_f) = E(\hat{y}_f - y_f) = E(\hat{y}_f) - E(y_f) = x_f E(b) - x_f \beta = 0$$

Dokładność prognozy

- Wariancja prognozy

$$var(\hat{y}_f) = var(x_f b) = x_f var(b) x_f' = x_f \Sigma_b x_f'$$

- Wariancja błędu prognozy

$$var(e_f) = E[(\hat{y}_f - y_f)(\hat{y}_f - y_f)'] =$$

$$= E[x_f(b-\beta)(b-\beta)x_f'] - 2x_f \underbrace{E[(b-\beta)e_f]}_{0} + e_f^2$$

$$= x_f \Sigma_b x_f' + \sigma^2 = var(\hat{y}_f) + \sigma^2$$

Przedziały ufności

- Prognoza to szczególny przypadek kombinacji liniowej

$$\frac{\delta' b - \delta' \beta}{\sqrt{\delta' \Sigma_b \delta}} \sim t_{N-k}$$

- Kładąc $\delta' b = x_f b$ uzyskujemy

$$Pr(\hat{y}_f - se(\hat{e}_f) t_{\frac{\alpha}{2}} < y_f < \hat{y}_f + se(\hat{e}_f) t_{\frac{\alpha}{2}})$$

Test prognoz

- Zastosowania testu
  1. wykrywanie zmiany strukturalnej
  2. sprawdzenie czy podgrupa zachowuje się jak populacja
- Procedura testowa rozpoczyna się od podziału próby

$$\underbrace{1 \ldots T}_{\textit{okres szacowania}\ \text{parametrów}} \qquad \underbrace{T+1 \ldots T+p}_{\textit{okres prognozy}}$$

Test prognoz

- Dla okresu szacowania parametrów uzyskujemy wartość parametrów

$$y_E = X_E \beta_E + \varepsilon_E$$

- Dla okresu prognozy

$$y_F = X_F \beta_F + \varepsilon_F$$

- Hipotezą zerową jest $\beta_F = \beta_E$, alternatywną $\beta_F \neq \beta_E$.
- W celu weryfikacji szacowane są parametry modelu na podstawie połączonej próby

$$y_{E+F} = X_{E+F}\beta + X_{E+F}\beta^{\star} + \varepsilon_{E+F}$$

- Weryfikowana jest hipoteza $\beta^{\star} = 0$
- Statystyka testowa ma postać

$$\frac{(S_{E+F} - S_E)/g}{S_E/(N-k)} \sim F(g, N-k)$$

Test Chowa (1960)

- Gregory C. Chow (1960). "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions". Econometrica. 28 (3): 591–605
- Test służy do weryfikacji hipotezy o stabilności parametrów
- Załóżmy, że istnieje model dla m podpróbek

$$y_s = X_s\beta_s + \varepsilon_s \qquad \varepsilon_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2\mathbb{I})$$

- Niech Q_{si} będzie zmienną 0-1, wyróżniającą próbkę s

$$y_s = Q_{si}X_s\beta_s + \varepsilon_s$$

- Parametry modeli będą identyczne jeżeli prawdziwa jest

$$H_0:\ \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m$$

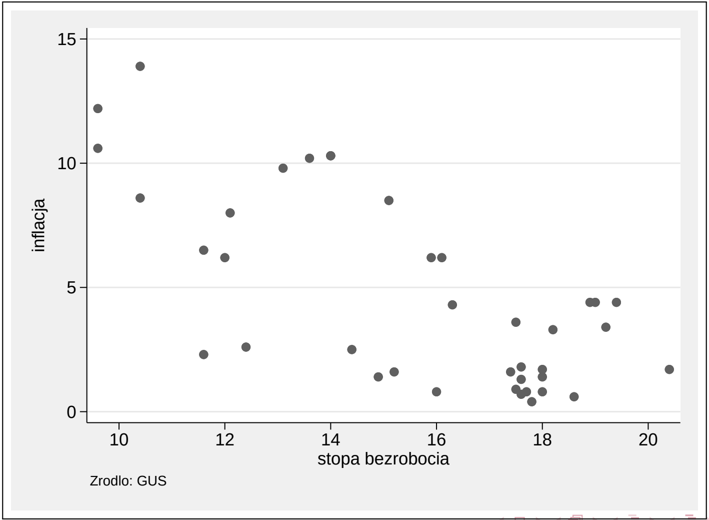
$$H_A:\ \neg H_0$$

Test Chowa

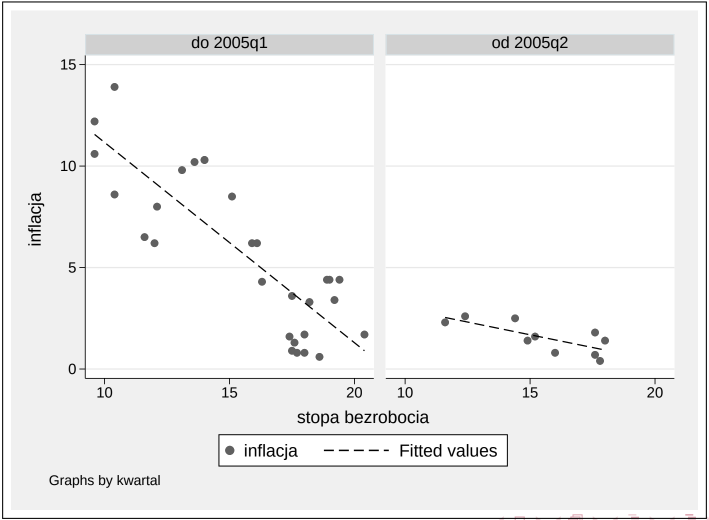
- Statystyka testowa

$$F = \frac{(S_R - \sum_i S_i)/K(m-1)}{\sum_i S_i/(N-mK)} \sim F_{k(m-1),N-mK}$$

Krzywa Philipsa



Krzywa Philipsa



Krzywa Philipsa 1995-2009

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      39
-------------+------------------------------           F(  1,    37) =   36.33
       Model |  275.254983     1  275.254983           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  280.348607    37  7.57698937           R-squared     =  0.4954
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4818
       Total |   555.60359    38  14.6211471           Root MSE      =  2.7526

------------------------------------------------------------------------------
        infl |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      bezrob |  -.8870748    .1471774    -6.03   0.000    -1.185284   -.5888652
       _cons |   18.42021    2.331593     7.90   0.000     13.69596    23.14447
------------------------------------------------------------------------------
```

- Więc $S_{E+F} = 280.348607$

Krzywa Philipsa 1995-2005

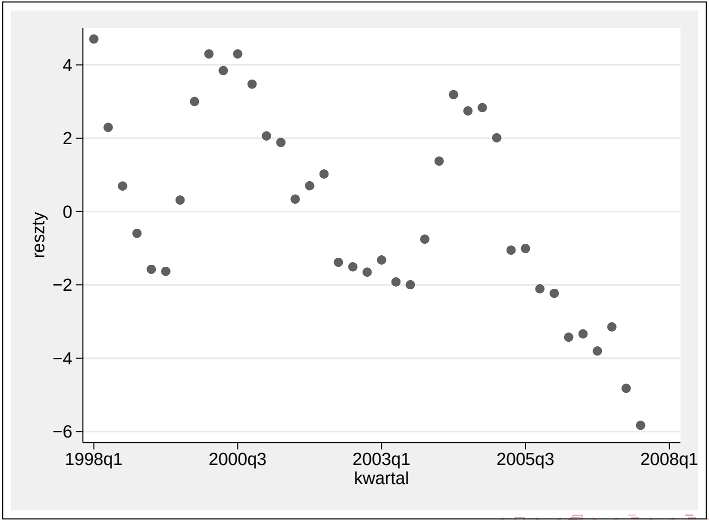
```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      29
-------------+------------------------------           F(  1,    27) =   61.85
       Model |  294.831523     1  294.831523           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  128.696062    27   4.7665208           R-squared     =  0.6961
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.6849
       Total |  423.527584    28  15.1259852           Root MSE      =  2.1832

------------------------------------------------------------------------------
        infl |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      bezrob |  -.9868678   .1254795    -7.86   0.000     -1.24433   -.7294051
       _cons |   21.03361   1.993939    10.55   0.000     16.94239    25.12484
------------------------------------------------------------------------------
```

- Więc $S_E = 128.696062$

$$\frac{(280-128)}{128/27} = 32.0625 \; > \; F(1,25) = 7{,}77$$

- Zatem nachylenie krzywej Philipsa różni się w obu okresach

Krzywa Philipsa 1995-2009 - reszty



Estymacja Praisa-Winstena

- W modelu

$$y_t = X_t\beta + \varepsilon_t$$

- w którym błąd losowy ma postać

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \qquad |\ \rho\ |< 1$$

- gdzie $var(u_t) = \sigma^2\mathbb{I}$
- Ten rodzaj autokorelacji jest nazywany autokorelacją pierwszego rzędu

- Można pokazać, że w tym przypadku

$$var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2 \rho^h$$

- a $var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbb{V}$
- Postać macierzy wariancji-kowariancji

$$V(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \dots & \\ \rho & 1 & \ddots & & & \\ \rho^2 & \rho & 1 & \ddots & & \\ \rho^3 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \rho \\ \vdots & & & & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

- Macierz L ma postać

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & -\rho & & & 0 \\ -\rho & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & -\rho \\ 0 & & & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

- Tym przekształceniom można nadać interpretację

- Przed przekształceniem zmiennych

$$y_t = X_t\beta + \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

- Dla obserwacji $t-1$ zmienna y_{t-1} jest dana wzorem

$$y_{t-1} = X_{t-1}\beta + \varepsilon_{t-1}$$

- Mnożąc przez ρ i odejmując stronami uzyskujemy

$$\underbrace{y_t - \rho y_{t-1}}_{y_t^\star} = (\underbrace{x_t - \rho x_{t-1}}_{x_t^\star})\beta + u_t$$

- Wartość parametru ρ otrzymuje się z regresji pomocniczej

$$e_t = \rho e_{t-1} + \eta_t$$

Procedura iterowana

1. Przy użyciu $\hat{\rho}^{(i-1)}$ oblicza się $y_t^{\star(i)}$, oraz $x_t^{\star(i)}$
2. Z regresji $y_t^{\star(i)}$ na $x_t^{\star(i)}$ szacowana jest $\beta_{UMNK}^{(i)}$
3. $e_{UMNK}^{(i)} = y - X\beta_{UMNK}^{(i)}$
4. Na podstawie $e_{UMNK}^{(i)}$ oblicza się $\hat{\rho}^{(i)}$
5. Procedurę powtarza się do momentu gry $\mid \hat{\rho}^{(i)} - \hat{\rho}^{(i-1)} \mid < \delta$

- Uzyskane oszacowanie jest asymptotycznie równoważne estymatorowi MNW

Estymator Neweya-Westa

- Newey i West zaproponowali estymator

$$\Sigma_b = T(X'X)^{-1}\hat{S}_x(X'X)^{-1}$$

gdzie

$$\hat{S}_x = \frac{1}{T}\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T} w_l e_t e_{t-l}(x_t x_{t-l}' - x_{t-l}x_t')$$

a $w_l = 1 - \frac{l}{L+1}$, zazwyczaj $L = T^{\frac{1}{4}}$

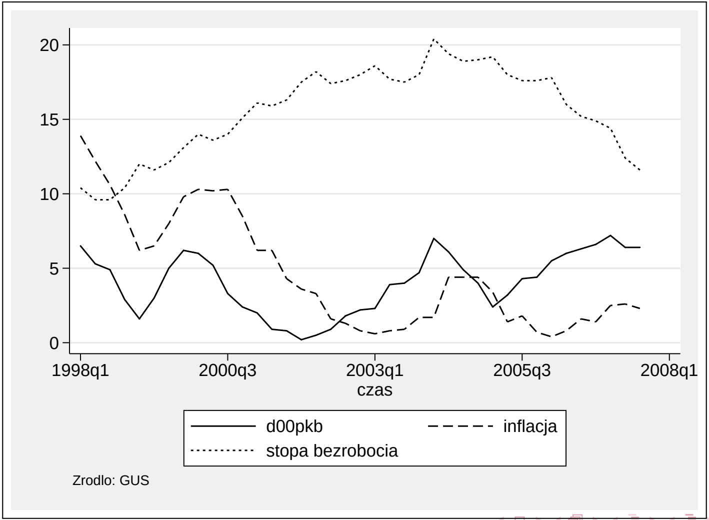
Model kursu walutowego

- Model monetarny kursu walutowego z lepkimi cenami

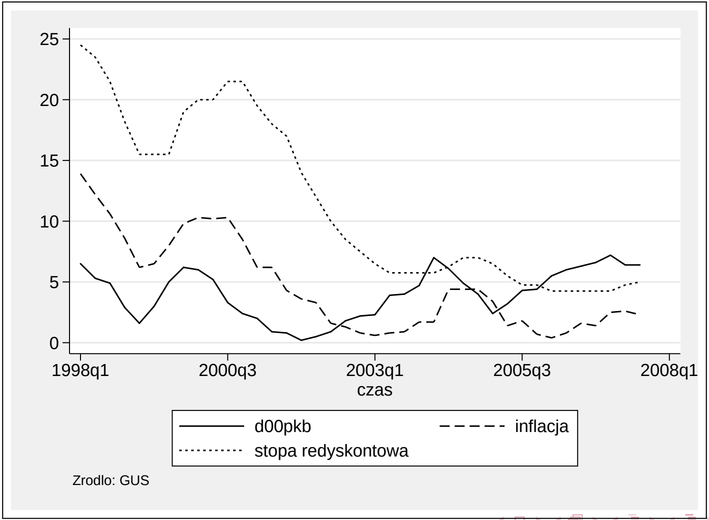
$$s = f(m, d00pkb, infl, stopa)$$

- s - $\ln(kursPL/euro)$
- m - $lnM1$
- d00pkb - stopa wzrostu gospodarczego (index: baza 100)
- infl - wskaźnik CPI
- stopa - stopa redyskontowa weksli

Model kursu walutowego



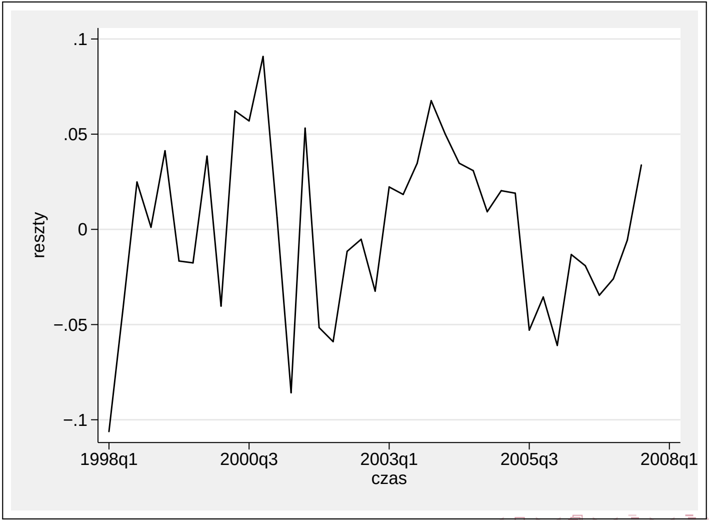
Model kursu walutowego



Model kursu walutowego - oszacowania

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      39
-------------+------------------------------           F(  4,    34) =   14.47
       Model |  .128550582     4  .032137645           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .075493821    34  .002220406           R-squared     =  0.6300
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.5865
       Total |  .204044403    38   .00536959           Root MSE      =  .04712

------------------------------------------------------------------------------
           s |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           m |  -.3456742   .0527449    -6.55   0.000    -.4528647   -.2384837
      d00pkb |   .0211117   .0067436     3.13   0.004      .007407    .0348164
        infl |   .0094756   .0082777     1.14   0.260    -.0073466    .0262979
       stopa |    -.02549   .0053733    -4.74   0.000    -.0364099   -.0145702
       _cons |   7.856898   .2818132    27.88   0.000     7.284184    8.429611
------------------------------------------------------------------------------
```

Model kursu walutowego - reszty



Model kursu walutowego

```
. estat dwatson

Durbin-Watson d-statistic(  5,    39) =  1.329686

. estat bgodfrey, lags(1/4)

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation
-----------------------------------------------------------------------
 lags(p)  |          chi2                 df              Prob > chi2
----------+------------------------------------------------------------
    1     |          2.652                 1                 0.1034
    2     |          2.940                 2                 0.2299
    3     |          3.252                 3                 0.3543
    4     |          4.598                 4                 0.3311
-----------------------------------------------------------------------
                        H0: no serial correlation
```

Model kursu walutowego

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      39
-------------+------------------------------           F(  3,    35) =   18.70
       Model |  .125641026     3  .041880342           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .078403558    35  .002240102           R-squared     =  0.6158
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.5828
       Total |  .204044584    38  .005369594           Root MSE      =  .04733

------------------------------------------------------------------------------
           s |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           m |  -.3474488   .0529554    -6.56   0.000     -.454954   -.2399436
      d00pkb |    .026742    .004634     5.77   0.000     .0173346    .0361495
       stopa |  -.0203707   .0029919    -6.81   0.000    -.0264446   -.0142969
       _cons |   3.223119   .2819451    11.43   0.000      2.65074    3.795498
------------------------------------------------------------------------------
```

Model kursu walutowego

```
. estat dwatson

Durbin-Watson d-statistic(  4,    39) =  1.190611

. estat bgodfrey, lags(1/4)

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation
-----------------------------------------------------------------------
 lags(p)   |          chi2               df                 Prob > chi2
-----------+-----------------------------------------------------------
     1     |          4.489               1                   0.0341
     2     |          4.641               2                   0.0982
     3     |          4.736               3                   0.1922
     4     |          6.251               4                   0.1812
-----------------------------------------------------------------------
                        H0: no serial correlation
```

Model kursu walutowego - odporne oszacowania

```
.newey s m d00pkb stopa, lag(1)

Regression with Newey-West standard errors          Number of obs  =        39
maximum lag: 1                                      F(  3,     35)  =     11.84
                                                    Prob > F       =    0.0000

------------------------------------------------------------------------------
             |             Newey-West
           s |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           m |  -.3474488   .0585417    -5.94   0.000    -.4662947   -.2286029
      d00pkb |    .026742   .0059323     4.51   0.000     .0146987    .0387853
       stopa |  -.0203707   .0037497    -5.43   0.000    -.0279831   -.0127584
       _cons |   3.223119   .3095652    10.41   0.000     2.594668     3.85157
------------------------------------------------------------------------------
```