Modelowanie Rynków Finansowych

Zajęcia 8

Katarzyna Lada
Paweł Sakowski
Paweł Strawiński

20 kwietnia, 2009

Powody zainteresowania

- Przy założeniu prawdziwości hipotezy rynku efektywnego nominalna cena obligacji jest równa zdyskontowanej do chwili obecnej wartości przyszłego dochodu ze sprzedaży obligacji (+ płatności kuponowe w przypadku obligacji kuponowych)
- Przy założeniu racjonalnych oczekiwań inwestorów jedynym źródłem zmian cen obligacji są nowe informacje dotyczące zmian poziomów krótkookresowych stóp procentowych

Wykorzystanie struktury stóp procentowych

- W strukturze terminowej stóp procentowych zawarte sa informacje dotyczące oczekiwań inflacyjnych
- Znajomość struktury terminowej stóp procentowych pozwala dokonać prawidłowej wyceny instrumentów finansowych niezależnie od ich konstrukcji $\longrightarrow$ zarządanie portfelem instrumentów dłużnych.
- Bank centralny wykorzystu ją do kontrolowania poziomu inflacji.
- Jest to również istotny parametr przy zarządzaniu długiem publicznym.
- Ułatwia emitentom wybór optymalnego czasu zapadalności.

Rodzaje struktur stóp

- Terminowa struktura stóp procentowych przedstawiająca relacje pomiędzy poziomami dochodowości instrumentów, a czasem pozostałym w danej chwili do ich wykupu,
- Struktura stóp procentowych ze względu na poziom ryzyka, związany z inwestycją w konkretne instrumenty. Najważniejszy podział przebiega między obligacjami rządowymi a komunalnymi i przemysłowymi,
- Międzynarodowa struktura stóp, która oprócz zwrotów wynikających z kształtowania się cen papierów wartościowych uwzględnia kurs walutowy oraz jego zmiany, które wpływają na zyski inwestorów.

Struktura terminowa

- Obligacja rządowa (bez ryzyka kredytowego) o stałym oprocentowaniu. Cena obligacji P jest ceną za uzyskanie strumienia płatności (kuponowych) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ w momentach $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Wielkość tych płatności jest ustalona w momencie emisji obligacji.
- Obligacja zerokuponowa – tylko jedna płatność w momencie wykupu. Cena to $P(t, T)$ gdzie T – czas wykupu. Zysk jest różnicą między ceną emisyjną a ceną wykupu.

Struktura terminowa

Struktura terminowa jest najczęściej odnoszona do skarbowych papierów wartościowych, ponieważ:

- przedsiębiorstwa nie są homogeniczne,
- skarbowe papiery wartościowe bardzo często są traktowane jako papiery wolne od ryzyka,
- z tego powodu ich cena zależy wyłącznie od zróżnicowania stóp procentowych.

Przedmiot analizy i oznaczenia

- *YTM* (*yield to maturity*) jest to taka wartość stopy dyskontowej, która zrównuje bieżącą wartość płatności obligacji z jej ceną.
- *YTM* wyliczamy z poniższego wzoru, gdzie F to wartość nominalna obligacji:

$$P = \frac{c_1}{(1+YTM)} + \frac{c_2}{(1+YTM)^2} + \cdots + \frac{c_n + F}{(1+YTM)^n}$$

- Krzywa dochodowości (*yield curve*) jest graficznym przedstawieniem stuktury czasowej stóp procentowych
- Ten sposób nie pozwala na łatwe porównywanie dochodowości obligacji o różnych kuponach, stąd krzywa zerokuponowa. Zwykle nie można zaobserwować jej bezpośrednio, stąd konieczność modelowania.

Krzywa dochodowości

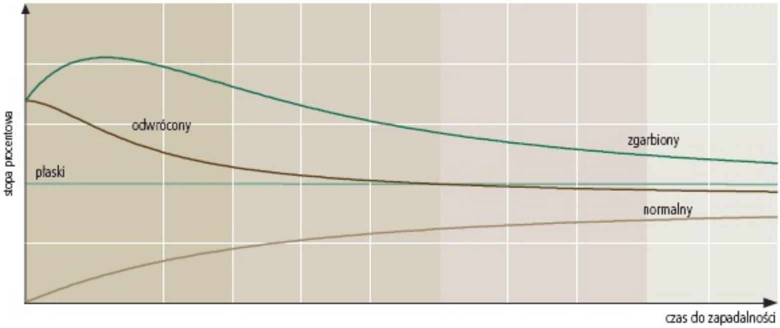
Krzywa dochodowości jest graficzną prezentacją terminowej struktury stóp procentowych. Może przybierać różne kształty, wśród typowych kształtów wyróżnia się:

- normalny, czyli rosnący (*normal*)
- płaski (*flat*)
- odwrócony, czyli malejący (*inverted*)
- zgarbiony (*humped*)

Kształty krzywych

Wykres 1.1

Podstawowe kształty krzywej dochodowości



Interpretacja ilościowa

- W ujęciu ilościowym krzywa dochodowości zapisywana jest jako

$$S_t = R_t - R_1$$

gdzie:
S_t - stopa dochodowości,
R_t - stopa procentowa t-okresowa,
R_1 - stopa procentowa jednookresowa.

Czysta teoria oczekiwań

- Jeżeli wszyscy inwestorzy są neutralni wobec ryzyka to interesuje ich wyłącznie oczekiwany dochód
- Wówczas wszystkie zwroty z obligacji krótkoterminowych są identyczne niezależnie od ich terminu zapadalności
- Zatem bieżąca struktura terminowa odzwierciedla oczekiwania co do przyszłych stóp procentowych, tzn. długoterminowe stopy kształtują się pod wpływem oczekiwań co do przyszłych stóp krótkoterminowych (nie ma premii za ryzyko)

Teoria oczekiwań

- Założenia takie jak w czystej teorii oczekiwań
- W modelu występuje premia za ryzyko inwestycyjne
  - premia jest stała w czasie
  - premia jest niezależna od terminu wykupu

Teoria preferencji płynności

- Premia za ryzyko jest stała w czasie, ale jej wartość rośnie wraz z wydłużaniem się okresu do terminu zapadalności obligacji.
- Obligacje o dłuższym terminie wykupu są mniej płynne, wobec tego inwestorzy postrzegają je jako bardziej ryzykowane i żądają wyższej premii

Teoria segmentacji rynku

- Instrumenty finansowe o różnych terminach zapadalności nie są doskonałymi substytutami,
- Zatem istnieją różne segmenty rynku
- Różnica w dochodowości zależy od popytu i podaży instrumentów w danym segmencie rynku.

Teoria preferowanych zachowań

- Teoria uwzględnia determinanty premii za ryzyko
- Inwestorzy mają preferencje co do ryzyka specyficznego związanego z inwestycją, okresu na jaki inwestują, stąd premia i za ryzyko płynności, i za przeniesienie się do innego segmentu rynku.
- Zatem premia zależy od wielu czynników

Kształt krzywej a teoria

Tabela 1.1

Podsumowanie teorii krzywej dochodowości

Kształt krzywej	Teoria oczekiwań w wersji czystej	Teoria preferencji płynności	Teoria segmentacji rynku
normalny	oczekiwanie łagodnej zwyżki stóp procentowych	oczekiwanie, iż stopy procentowe pozostaną bez zmian; rosnąca premia za utratę płynności	relatywnie wyższa płynność segmentu inwestorów krótkoterminowych (banki) niż segmentu inwestorów długoterminowych (firmy ubezpieczeniowe i fundusze emerytalne)
rosnący	oczekiwanie silnej zwyżki stóp procentowych	oczekiwanie silnej zwyżki stóp procentowych; rosnąca premia za utratę płynności	znaczna przewaga płynności po stronie inwestorów krótkoterminowych
odwrócony	oczekiwanie znaczącego spadku stóp procentowych	oczekiwanie znaczącego spadku stóp procentowych, rosnąca premia za utratę płynności	znaczna przewaga płynności po stronie inwestorów długoterminowych
zgarbiony	oczekiwanie wzrostu stóp w krótkim terminie oraz ich spadku w długim terminie	oczekiwanie spadku stóp procentowych w, rosnąca premia za utratę płynności	względna równowaga popytu ze strony inwestorów krótko- i długoterminowych

Źródło: opracowanie własne

- Modele jednoczynnikowe ze stochastycznym dyskontem uwzględniają specyficzną dla długookresowych obligacji premię za ryzyko
- Długookresowa stopa procentowa zależy od stóp krótkooresowych i premii za ryzyko
- Premia za ryzyko zależy od warunkowej kowariancji między stopą dyskontową i długookresową stopą zwrotu dla papierów o różnym terminie zapadalności
- W modelu jednoczynnikowym cena obligacji zależy liniowo od nieobserowanego czynnika, a ten liniowo od krótkookresowej stopy procentowej
- Modele wyprowadza się dla czasu dyskretnego lub ciągłego

Modele jednoczynnikowe (w czasie ciągłym)

Ogólna postać modelu: stopa procentowa $r(t)$ jest procesem Itô danym stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

gdzie $W(t)$ jest standardowym ruchem Browna (uogólnienie białego szumu na wiele wymiarów).

- Dla modeli jednoczynnikowych zakładamy, że $a(t) = a(r(t))$ i $b(t) = b(r(t))$.
- Oczekujemy ponadto, że stopy procentowe będą dodatnie i że $r(t)$ ma charakter autoregresyjny (i nie dąży do zera lub nieskończoności).

Typy modeli jednoczynnikowych

Model	$a(r)$	$b(r)$
M: Merton (1973)	μ	σ
D: Dothan (1978)	μr	σr
V: Vasicek (1977)	$\alpha(\mu - r)$	σ
CIR: Cox-Ingersoll-Ross (1985)	$\alpha(\mu - r)$	$\sigma\sqrt{r}$
PS: Pearson-Sun (1994)	$\alpha(\mu - r)$	$\sigma\sqrt{r - \beta}$
BS: Brennan-Schwartz (1979)	$\alpha(\mu - r)$	σr
BK: Black-Karasinski (1991)	$\alpha r - \gamma r \log r$	σr

- Modele M, V oraz PS dla niedodatniego β nie gwarantują nieujemności stopy procentowej,
- Modele M i D nie nadają również r charakteru autoregresyjnego (model BK wymaga do tego dodatniości γ).

Modele Nelsona-Siegela oraz Svenssona

- Oba modele są modelami opisowymi (oszczędnymi)
- Oba modele bazują na chwilowej stopie procentowej
- Model Nelsona-Siegela opisuje funkcyjną zależność pomiędzy czasem zapadalności, a poziomem implikowanej stopy terminowej
- Jest to model czasu ciągłego
- Postać funkcyjna ma formę równania różniczkowego drugiego rzędu.

Model Nelsona-Siegela

Model Nelsona-Siegela

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] + \beta_2 \frac{t}{\tau} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$$

gdzie $f(t)$ jest poziomem oprocentowania depozytów jednodniowych.

Model Nelsona-Siegela

po scałkowaniu otrzymujemy:

$$r_t = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{1 - \exp(t/\tau)}{t/\tau} - \beta_2 \exp(-t/\tau)$$

Model zawiera trzy komponenty

- długoterminowy β_0
- średnioterminowy $\beta_1 \frac{1-\exp(t/\tau)}{t/\tau}$
- krótkoterminowy $\beta_2 \left(\frac{1-\exp(t/\tau)}{t/\tau} - \exp(-t/\tau) \right)$

Model Nelsona-Siegela

Z własności funkcji Nelsona-Siegela wynika następująca interpretacja parametrów:

- parametr β_0 odpowiada długoterminowej (o nieskończenie długiej zapadalności) stopie natychmiastowej, ponieważ $\lim_{t\to\infty} r_t = \beta_0$. Inaczej mówiąc, jest interpretowana jako stopa do której w długim okresie dążą wszystkie inne.
- suma $\beta_0 + \beta_1$ jest z kolei interpretowana jako nieskończenie krótka stopa natychmiastowa, czyli w praktyce, jako bieżąca stopa oprocentowania lokaty overnight, ponieważ $\lim_{t\to 0} r_t = \beta_0 + \beta_1$

Model Nelsona-Siegela

- Relacja β_1/β_2 determinuje punkt ekstremalny krzywej $r(t)$.
- Funkcja może mieć najwyżej jedno ekstremum i posiada je, gdy wartość bezwzględna parametru β_1 jest mniejsza od wartości bezwzględnej β_2.
- Znak parametru β_2 określa charakter tego ekstremum: ujemne β_2 oznacza, iż funkcja r_t osiąga minimum, zaś dodatni znak β_2 odpowiada za osiąganie przez r_t maksimum.
- Parametr τ determinuje wartość czasu zapadalności, w którym osiągane jest ekstremum funkcji r_t.

Dobór parametrów

Tabela 4.1
Wpływ doboru parametrów na kształt krzywej Nelsona-Siegela

β_0	β_1	β_2	τ	Relacja β_1 i β_2	Postać krzywej
+	–	+	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$	rosnąca, wypukła
+	–	–	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$	rosnąca („normalna")
+	+	–	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$	odwrócona, wypukła
+	+	+	+	$\lvert\beta_1\rvert \geq \lvert\beta_2\rvert$	odwrócona
+	+	+	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$	łukowata, leży powyżej β_0
+	–	+	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$	łukowata, dwukrotnie przecina β_0
+	–	–	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$	odwrócona łukowata, leży poniżej β_0
+	+	–	+	$\lvert\beta_1\rvert < \lvert\beta_2\rvert$	odwrócona łukowata, dwukrotnie przecina β_0

Źródło: MEIER I. [1999], s. 12.

Model Svenssona

Model Svenssona jest rozwinięciem modelu Nelsona - Siegela

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} \exp\left[-\frac{t}{\tau_2}\right]$$

- Świętoń M. (2002), Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998-2001, Materiały i Studia nr 150, NBP.
- Dane 1998-2001
- Funkcja do oszacowania na podstawie modelu Nelsona-Siegela

$$r_t = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{1 - \exp(t/\tau)}{-t/\tau} - \beta_2 \exp(-t/\tau)$$

Krok 1.

Narzucenie restrykcji:

- dodatniość stopy długoterminowej

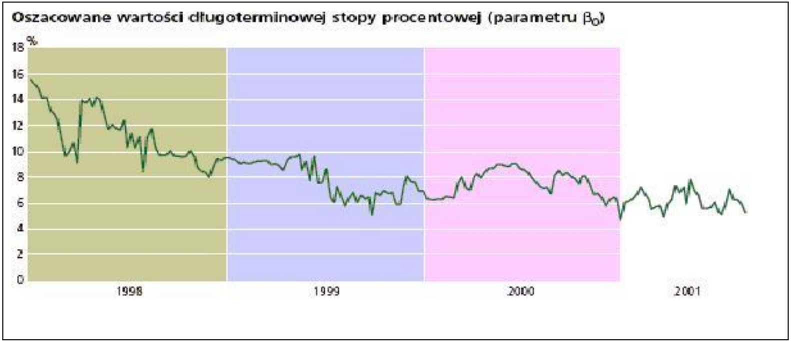
$$\beta_0 > 0$$

- dodatniość stopy krótkoterminowej

$$\beta_0 + \beta_1 > 0$$

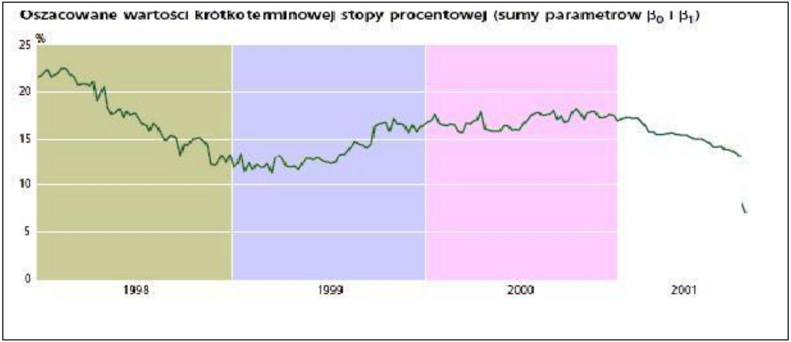
Krok 2.

Szacowanie parametru β_0 jako stopy długoterminowej na podstawie danych z kolejnych poniedziałków (rynek wtórny obligacji oraz rynek pierwotny bonów)



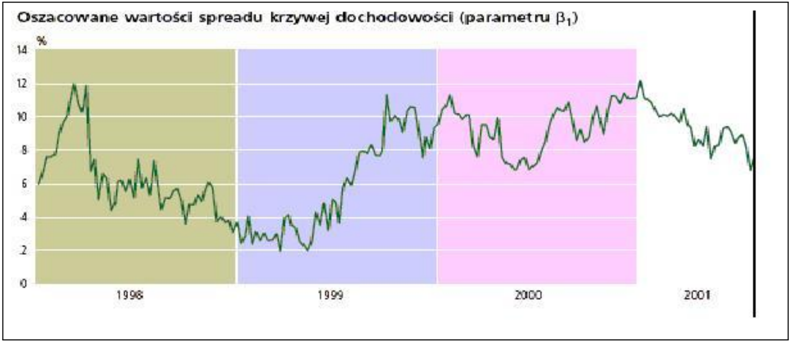
Krok 3.

Szacowanie wartości krótkoterminowej stopy procentowej ($\beta_0 + \beta_1$)



Krok 4.

Szacowanie *spreadu*(β_1)



- Ziarko-Siwek, Kamiński (2003)
- Marciniak (2006)
- Bolder, Streliski (1999)