Value at Risk (VaR)

Jerzy Mycielski

WNE

2018

Warunkowa heteroskedastyczność

- O warunkowej autoregresyjnej heteroskedastyczności mówimy, gdy

$$\sigma_t^2 = \mathrm{E}\left(\varepsilon_t^2 \middle| \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-s}\right) \neq \mathit{const}.$$

- *ARCH* (**A**uto**r**egressive **C**onditional **H**eteroskedasticity). W tym przypadku wariancja ε_t zależy liniowo od kwadratów ε_t z poprzednich okresów:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{E}\left(\varepsilon_t^2 \middle| \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-s}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_s \varepsilon_{t-s}^2$$

- Test *ARCH*. Testujemy łączną istotność $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ w regresji

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_s e_{t-s}^2, \tag{1}$$

- Statystyka $LM = TR^2$, gdzie T jest liczbą obserwacji a R^2 pochodzi z regresji (1). Statystyka ta ma asymptotyczny rozkład χ_s^2

Warunkowa heteroskedastyczność - modele

- ARCH(q)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= u_t \sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2
\end{aligned}
$$

$\theta_i \geq 0$ dla $i = 0, \ldots, q$

- GARCH(p,q) - często lepiej dopasowany przy mniejszej liczbie parametrów

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= u_t \sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \sigma_{t-p}^2 + \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2,
\end{aligned}
$$

$\alpha_i \geq 0$, $\theta_i \geq 0$

Warunkowa heteroskedastyczność - modele

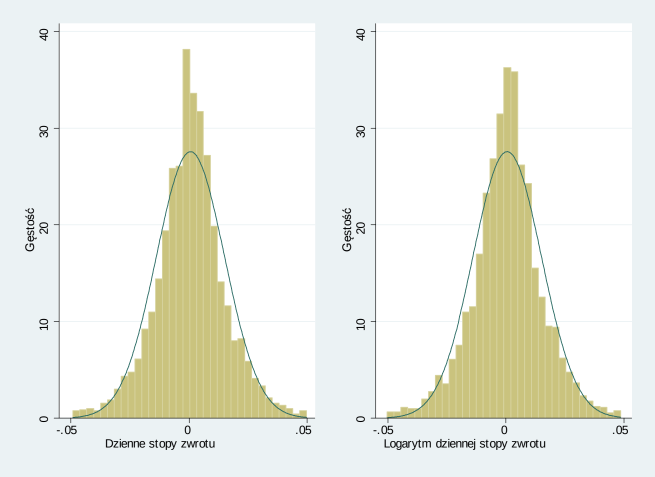
- TARCH - uwzględniamy efekt dźwigni (silniejszą reakcję wariancji na straty niż na zyski)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= u_t \sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \left(\varepsilon_{t-1}^{+}\right) + \beta_2 \left(\varepsilon_{t-2}^{+}\right)^2 + \ldots + \beta_s \left(\varepsilon_t\right. \\
\theta_i + \beta_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

- ARCHM - uwzględniamy wpływ zmian wariancji na oczekiwane stopy zwrotu

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + \delta \sigma_t^2 + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= u_t \sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \theta_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}^2
\end{aligned}
$$

Leptokurtoza rozkładu WIG (dane z okresu 1.10.1994-19.04.2007)



Rysunek: Rozkład zwrotów i logarytmów zwrotów

WIG statystyki

	$\frac{P_t}{P_{t-1}}$	$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$	Reszty z modelu $AR(1)$
Skośność	-0.030	-0.156	-0.094
Kurtoza	6.186	6.314	6.433
Stat. JB	1328	1449	1544
$\Pr\left(JB > \chi_2^{2*}\right)$	0.000	0.000	0.000

- Test przeprowadzono dla $ARCH$ dla $s = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Uzyskano statystyk testowe: 320.9, 403.5, 451.5, 467.6, 469.6.
- Wartości p odpowiadające tym wielkościom statystyk praktycznie równe zeru

Wyniki oszacowań

r_t	ARCH(5) b	ARCH(5) p	ARCHM(5) b	ARCHM(5) p	GARCH(p,q) b	GARCH(p,q) p	TARCH b	TARCH p
r_{t-1}	0.1512	0.000	0.1511	0.000	0.1410	0.000	0.1488	0.000
stała	0.0008	0.000	0.0010	0.015	0.0008	0.001	0.0006	0.009
σ_t^2			-0.8352	0.631				
ε_{t-1}^2	0.1685	0.000	0.1672	0.000	0.1150	0.000	0.1054	0.000
ε_{t-2}^2	0.1023	0.000	0.1028	0.000				
ε_{t-3}^2	0.1270	0.000	0.1276	0.000				
ε_{t-4}^2	0.1578	0.000	0.1578	0.000				
ε_{t-5}^2	0.0814	0.000	0.0821	0.000				
stała	0.0001	0.000	0.0001	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.000
σ_{t-1}^2					0.5129	0.004	0.8971	0.000
σ_{t-2}^2					0.3506	0.030		
$\left(\varepsilon_{t-1}^{+}\right)^2$							-0.0404	0.000
BIC	-17669.4		-17661.5		-17802.8		-17809.1	

Diagnostyka modelu ARCH

- Zgodnie z założeniami

$$\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} = u_t \sim N(0,1)$$

- W przybliżeniu

$$\frac{\widehat{\varepsilon}_t}{\widehat{\sigma}_t} = \widehat{u}_t \sim N(0,1)$$

	$ARCH(5)$	$ARCHM(5)$	$GARCH(1,2)$	$TARCH$
test ARCH	6.879	6.911	1.912	2.602
p	0.2298	0.2273	0.8612	0.7611
skośność	-0.126	-0.125	-0.171	-0.133
kurtoza	4.263	4.266	4.397	4.263
test JB	216.8	217.6	270.2	217.8
p	0.000	0.000	0.000	0.000

VaR - definicja

- Definicja: VaR jest równe takiemu $\mathcal{J}_t$, że

$$\Pr\left(L_t < \mathcal{J}_t\right) = F\left(\mathcal{J}_t\right) = 1 - \alpha$$

- a więc

$$\mathcal{J}_t = F^{-1}\left(1 - \alpha\right)$$

- Intuicyjnie: z p-stwem równym α ponoszona jest strata większa lub równa VaR
- Policzyć VaR dla okresu t możemy jeśli mamy model dla rozkładu L_t

Var a model dla stóp zwrotu

- VaR a logarytmiczna stopa zwrotu (A_t wielkość aktywów)

$$\begin{aligned}\Pr\left(L_t < \mathcal{J}_t\right) &= \Pr\left\{A_{t-1}\left[\exp\left(r_t\right)-1\right] < \mathcal{J}_t\right\} \\ &= \Pr\left\{r_t < \ln\left[1+\left(\frac{\mathcal{J}_t}{A_{t-1}}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

- Dla $k_t = \ln\left[1+\left(\frac{\mathcal{J}_t}{A_{t-1}}\right)\right]$, takiego, że $\Pr\left(r_t < k_t\right) = 1-\alpha$

$$\mathcal{J}_t = A_{t-1}\left[\exp\left(k_t\right)-1\right] \tag{2}$$

Var a model dla stóp zwrotu

- Przyjmijmy, że znormalizowany rozkład jest stały w czasie

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(r_t < k_t\right) &= \Pr\left(\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}\right) \\
&= \Pr\left(u_t < \frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}\right) = F\left(\frac{k_t - \mu_t}{\sigma_t}\right) = 1 - \alpha
\end{aligned}
$$

- Przy założonym poziomie prawdopodobieństwa α:

$$
k_t = \mu_t + F^{-1}\left(1 - \alpha\right)\sigma_t
$$

- Przybliżmy ten rozkład rozkładem empirycznym $\widehat{u}_t$ (uwzględniamy w ten sposób kurtozę nie wychwyconą przez model typu ARCH)

$$
\widehat{k}_t = \widehat{\mu}_t + \widehat{F}^{-1}\left(1 - \alpha\right)\widehat{\sigma}_t \tag{3}
$$

Obliczenie VaR

- VaR szacujemy z równania (2) jako:

$$\widehat{\mathcal{J}}_t = A_{t-1}\left[\exp\left(\widehat{\mu}_t + \widehat{F}^{-1}(1-\alpha)\,\widehat{\sigma}_t\right) - 1\right]$$

System świateł drogowych

- Banki mają obowiązek stworzenia model umożliwia wyliczenie VaR
- Dobrze zbudowany model zmniejsza wymagane rezerwy a zatem zmniejsza koszty banku
- Banki mają obowiązek kontrolowania skuteczności modelu w odniesieniu do wyznaczania właściwego poziomu rezerw.
- Miarą skuteczności modelu różnica między teoretyczną i zaobserwowaną częstością szkód większych niż VAR
- Liczbę szkód większych niż VaR w ciągu okresu składającego się z n obserwacji oznaczymy przez w.
- w ma rozkładu dwumianowy z p-stwem sukcesu równym α, liczbą prób równą n i liczbą sukcesów równą w.

Zalecenia Komitetu Bazylejski Nadzoru Bankowego

- Model dla którego liczba przekroczeń VaR policzonego dla $\alpha = 0.01$ i $n = 250$ przekroczyła 9 (światło czerwone) nie może być stosowany
- Przy liczbie przekroczeń większej niż 4 (światło żółte) powinno zastosować się obligatowyjne mnożniki podwyższające wysokość rezerw ostrożnościowych.

Model oszacowany - wyniki

liczba przekroczeń	σ_t^2=const	ARCH(5)	ARACHM(5)	GARCH(1,2)	TARCH	Teoretyczne
0	0.4964	0.2356	0.2356	0.1294	0.1186	0.0811
1	0.1484	0.1259	0.1259	0.1854	0.1792	0.2047
2	0.0263	0.1844	0.1844	0.1695	0.2200	0.2574
3	0.0564	0.1896	0.1896	0.2850	0.2411	0.2149
4	0.1252	0.1117	0.1117	0.1027	0.1356	0.1341
5	0.0152	0.0747	0.0747	0.0917	0.0827	0.0666
6	0.0277	0.0719	0.0719	0.0301	0.0228	0.0275
7	0.0308	0.0062	0.0062	0.0062	0.0000	0.0097
8	0.0443	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0030
9	0.0138	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0008
$\geq$10	0.0156	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003

Model oszacowany - wnioski

- Wynik w pierwszej kolumnie oznacza, że zastosowanie do liczenia VaR modelu o stałej wariancji, prowadzi do uzyskania częstości przekroczeń VaR większej niż 9 i ponad 50-krotnie większej niż teoretyczna.
- Modele z klasy ARCH dają częstości przekroczeń są bardziej zbliżone do wartości teoretycznych.
- Model *TARCH* generuje
  - najmniej dużych liczb przekroczeń
  - rozkład liczby przekroczeń najbardziej zbliżony do rozkładu teoretycznego.