# Koherentne miary ryzyka

Jerzy Mycielski

5 grudnia 2019

# Normalizacja i monotoniczność

- Oznaczmy jako $Z$ przychód z aktywa/portfela, a jako $\rho$ miarę ryzyka dla tego aktywa/portfela
- Normalizacja:

  $$\rho(0) = 0$$

  Ryzyko związane z posiadaniem zerowego portfela aktywów równe zero
- Monotoniczność: jeśli dla aktywów/portfeli 1 i 2 z prawdopodobieństwem równym 1

  $$Z_1 \leq Z_2$$

  to

  $$\rho(Z_1) \geq \rho(Z_2)$$

  Portfel o zawsze wyższym przychodzie jest mniej ryzykowny

# Sub-addytywność

- Sub-addytywność: dla aktywów 1 i 2

$$\rho\left(Z_1+Z_2\right) \leq \rho\left(Z_1\right)+\rho\left(Z_2\right)$$

  Dywersyfikacja prowadzi zawsze do spadku ryzyka
- Założenie o subaddytywności może być zastąpione słabszym założeniem o wypukłości: dla $\lambda \in [0,1]$

$$\rho\left(\lambda Z_1+(1-\lambda) Z_2\right) \leq \lambda \rho\left(Z_1\right)+(1-\lambda) \rho\left(Z_2\right)$$

# Dodatnia homogeniczność i niezmieniczość ze względu na przesunięcia

- Dodatnia homogeniczność: dla $\alpha > 0$

$$\rho\left(\alpha Z_1\right) = \alpha\rho\left(Z_1\right)$$

  Ryzyko jest wprost proporcjonalne do kwoty zainwestowanej w aktywo/portfel

- Jeśli $A$ jest portfelem deterministycznym z pewnym przychodem $a$, to

$$\rho\left(Z + A\right) = \rho\left(Z\right) - a$$

# Wartość narażona na ryzyko (VaR)

- Wartość narażona na ryzyko: VaR (Value at Risk)
- Definicja: wielkość straty, która może zostać przewyższona z p-stwe $\alpha$

$$Pr(Z < VaR) = F(VaR) = 1 - \alpha$$

gdzie $F()$ jest dystrybuantą $Z$

# VaR

- VaR nie jest koherentną miarą ryzyka. Nie spełnia założenia o sub-addytywności (może to zniechęcać do dywersyfikacji)
- Przykład:
- 2 obligacje, p-stwo niewypłacalności niezależne i równe 4%, stopa zwrotu 10%
    - strata w przypadku niewypłacalności 0.7 wartości obligacji
    - Przypadek A (jedna obligacja w portfelu)
        - 95% VaR równy 10%
    - Przypadek B (dwie obligacje w portfelu)
        - p-stwo niewypłacalności

$$1-(1-0.04)^2 = 0.0784$$

        - 95% VaR równy

$$0.5*(-0.7) = -0.35$$

# AVaR

- Średni VaR
- Oczekiwana strata dla przypadku, gdy strata przewyższy wartość dla której p-stwo wynosi $\alpha$

$$AVaR = E\left(Z \mid F(Z) = 1 - \alpha\right)$$

- Średni VaR jest koherentną miarą ryzyka