Krzywa dochodowości

Jerzy Mycielski

29 listopada 2018

Stopy procentowe spot

- Stopa procentowa spot $R_{t,\tau}$ to stopa zwrotu z inwestycji rozpoczętej w czasie t i trwającej τ okresów.
- Zazwyczaj stopy spot wyraża się w stosunku rocznym.
- Stopę spot można bezpośrednio policzyć obserwując ceny obligacji zerokuponowych o różnych okresach zapadalności:

$$P_{t,\tau} = \frac{M}{(1 + R_{t,\tau})^{\tau}}$$

  gdzie $P_{t,\tau}$ jest ceną obligacji o terminie zapadalności τ w momencie t, a M ceną jej wykupu
- Nie dla wszystkich okresów zapadalności tego rodzaju instrumenty są dostępne.
- Jeśli taki instrument istnieje to:

$$R_{t,\tau} = \sqrt[\tau]{\frac{P_{t,\tau}}{M}} - 1$$

Stopy procentowe spot

- Dla dłuższych okresów zapadalności można policzyć $R_{t,\tau}$ wykorzystując zależność między stopami procentowymi a wartością obligacji:

$$P_{t,\tau} = \frac{C_{t+1}}{1+R_{t,1}} + \frac{C_{t+2}}{(1+R_{t,2})^2} + \ldots + \frac{C_{t+\tau}+M_{t+\tau}}{(1+R_{t,\tau})^\tau}$$

- Dysponując np. danymi dotyczącymi obligacji kuponowych dla okresów zapadalności 1,2,3 o identycznej dacie emisji możemy policzyć stopy spot $R_{t,1}$, $R_{t,2}$, $R_{t,3}$ rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} P_{t,1} &= \frac{C_{t+1}+M_{t+1}}{1+R_{t,1}} \\ P_{t,2} &= \frac{C_{t+1}}{1+R_{t,1}} + \frac{C_{t+2}+M_{t+2}}{(1+R_{t,2})^2} \\ P_{t,3} &= \frac{C_{t+1}}{1+R_{t,1}} + \frac{C_{t+2}}{(1+R_{t,2})^2} + \frac{C_{t+3}+M_{t+3}}{(1+R_{t,3})^3} \end{cases}$$

Wewnętrzna stopa zwrotu (yield to maturity)

- Wewnętrzną stopę zwrotu y_t (yield to maturity) dla obligacji liczy się rozwiązując nieliniowe równanie:

$$P_{t,\tau} = \frac{C_{t+1}}{1+y_t} + \frac{C_{t+2}}{(1+y_t)^2} + \ldots + \frac{C_{t+\tau} + M_{t+\tau}}{(1+y_t)^{\tau}}$$

- Wewnętrzna stopa zwrotu stanowi pewną syntetyczną miarę zyskowności inwestycji w obligację
- Miara ta jest jednak kontrowersyjna, ponieważ opiera się na założeniu, że możliwe jest reinwestowanie kuponów w inwestycje o stopie zwrotu y_t
- W ogólnym przypadku stopy spot i stopy zwrotu nie są równe wewnętrznej stopie zwrotu

Funkcja akumulacji, funkcja dyskonta

- Funkcja akumulacji (wartość inwestycji 1$ po τ okresów)

$$A(t,\tau) = (1 + R_{t,\tau})^{\tau} = exp(r_{t,\tau})$$

- Funkcję dyskontująca (zdyskontowana wartość 1$ wypłaconego zaτ okresów)

$$d(t,\tau) = \frac{1}{A(t,\tau)} = \frac{1}{(1 + R_{t,\tau})^{\tau}} = exp(-r_{t,\tau})$$

- $r_{t,\tau}$ to zlogarytmowana funkcja akumulacji.
- Zauważmy, że:

$$ln(1 + R_{t,\tau}) = \frac{1}{\tau} r_{t,\tau}$$

Terminowa stopa procentowa

- F_{τ_1,τ_2} termionowa stopa procentowa dla okresu od τ_1 do τ_2
- Warunek braku arbitrażu implikuje, że

$$(1+R_{0,\tau_2})^{\tau_2} = (1+R_{0,\tau_1})^{\tau_1}(1+R_{\tau_1,\tau_2})^{\tau_2-\tau_1}$$

- Logarytmując stronami otrzymujemy:

$$\tau_2 r_{0,\tau_2} = \tau_1 r_{0,\tau_1} + (\tau_2-\tau_1) F_{\tau_1,\tau_2}$$

a więc warunek braku arbitrażu implikuje, że

$$F_{\tau_1,\tau_2} = \frac{\tau_1 r_{0,\tau_1} - \tau_2 r_{0,\tau_2}}{\tau_2-\tau_1}$$

Chwilowa stopa procentowa

- Zdefiniujmy funkcję $F_{t,\tau}$ dla stopy forward między okresem t i $t+\tau$ (lub dla stopy spot w momencie t i terminie zapadalności τ)

$$F_{t,\tau} = ln(1+R_{t,\tau}) = F_{\tau_1,\tau_2} = \frac{tr_{0,\tau} - (t+\tau)\,r_{0,\tau}}{-\tau_2} = \frac{1}{\tau} r_{t,\tau}$$

- Zauważmy, że

$$lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{F_{t,\tau}}{m}\right)^{m\tau} = exp(\tau F_{t,\tau}) = exp(r_{t,\tau})$$

a więc $r_{t,\tau}$ można też stopę procentową inwestycji o horyzoncie τ, dla której wypłata odsetek następuje w sposób ciągły (*continuously compounded interest rate*).

- Chwilowa stopa procentowa (instantaneus forward rate)

$$F_t = \lim F_{t,\tau} = \lim \frac{r_{t,\tau}}{\tau} = \frac{\partial r_{t,\tau}}{\partial \tau}\bigg|$$

Chwilowa stopa procentowa i stopa spot

- Wysokość zlogarytmowanej stopy procentowej spot w momencie t dla terminu zapadalności τ

$$ln(1+R_{t,\tau}) = \frac{1}{\tau} r_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} \int\limits_{t}^{t+\tau} F_s ds$$

a zatem stopy spot

$$R_{t,\tau} = \exp\left(\frac{1}{\tau} \int\limits_{t}^{t+\tau} F_s ds \right) - 1$$

Krzywa dochodowości - definicja

- Krzywa dochodowości (yield curve) opisuje zależność między wysokością oprocentowania dłużnych instrumentów finansowych a terminem ich zapadalności.
- Krzywa dochodowości ilustruje struktury terminową stóp procentowych.
- Analiza krzywej dochodowości ma szerokie zastosowanie w analizach inwestycyjnych oraz makroekonomicznych

Stopa zwrotu (HPR - holding period return)

- Stopa zwrotu z posiadania obligacji o okresie zapadalności τ w okresie t do $t+1$

$$H_{t+1,\tau} = \frac{P_{t+1,\tau} - P_{t,\tau} + C_{t+1}}{P_{t,\tau}}$$

- Wysokość ceny obligacji w okresie $P_{t+1,\tau}$ jest nieznana więc analizując stopę zwrotu posługujemy się zazwyczaj oczekiwanymi stopami zwrotu $E_t\left(H_{t+1,\tau}\right)$
- Jeśli założymy, że że spełnione jest założenie o racjonalnych oczekiwaniach, to

$$\begin{aligned} k_{t,\tau} &= E_t\left(H_{t+1,\tau}\right) = E_t\left(\frac{P_{t+1,\tau} - P_{t,\tau} + C_{t+1}}{P_{t,\tau}}\right) \\ &= \frac{E_t\left(P_{t+1,\tau}\right)}{P_{t,\tau}} - 1 + \frac{C_{t+1}}{P_{t,\tau}} \end{aligned}$$

Wzór racjonalną wycenę (RVF)

- Rekurencyjnie podstawiając powyższy wzór uzyskujemy wzór na racjonalną wycenę (RVF - Rational Valuation Formula):

$$P_{t,\tau} = E_t \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{C_{t+j}}{\prod_{i=0}^{j} (1 + k_{t+i,\tau_i})} + \frac{M}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + k_{t+i,\tau_i})} \right) \tag{1}$$

- Wzór ten może posłużyć do weryfikacji teorii na temat rynku obligacji (np. dotyczących jego efektywności) pod warunkiem sformułowania modelu dla $k_{t+i,\tau}$.
- Równanie wykorzystujące stopy spot

$$P_{t,\tau} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{C_{t+j}}{\left(1 + R_{t,\tau_j}\right)^{\tau_j}} + \frac{M}{\left(1 + R_{t,\tau_n}\right)^{\tau_n}} \tag{2}$$

Relacja między stopami spot a HPR

- Równania wyceny (1), (2) są równoważne jeśli:

$$E_t\left(\frac{1}{\prod_{i=0}^{j}\left(1+k_{t+i,\tau_i}\right)}\right)=\frac{1}{\left(1+R_{t,\tau_i}\right)^{\tau_i}}$$

- Zatem $k_{t+i,\tau}$ (oczekiwania dotyczące przyszłych stóp zwrotu) można policzyć na podstawie policzonych stóp spot:

$$E_t\left(\frac{1}{1+k_{t+i,\tau}}\right)=\frac{\left(1+R_{t,\tau_{i-1}}\right)^{\tau_{i-1}}}{\left(1+R_{t,\tau_i}\right)^{\tau_i}}$$

Teorie wyjaśniające kształtowanie się krzywej dochodowości

- Teoria oczekiwań
$$k_{t,\tau} = r_t$$
gdzie r_t jest jednookresową stopą procentową dla aktywa bezpiecznego
- Teoria oczekiwań ze stałą premią
$$k_{t,\tau} = r_t + T$$
gdzie premia T jest stała i taka sama dla wszystkich okresów zapadalności
- Teoria pereferencji płynności
$$k_{t,\tau} = r_t + T_\tau$$
gdzie premia jest stała w czasie ale zmienia się z okresem zapadalności. Ponadto $T_\tau > T_{\tau-1}$

Teorie wyjaśniające kształtowanie się krzywej dochodowości

- Teoria zmieniającego się w czasie ryzyka

$$k_{t,\tau} = r_t + T_\tau(\mathbf{z}_t)$$

gdzie premia jest funkcją wektora zmiennych $\mathbf{z}_t$

- Teoria segmentacji rynku

$$k_{t,\tau} = r_t + T(z_\tau)$$

gdzie z_τ jest relatywną kapitalizacją instrumentów o zapadalności τ w ogóle aktywów

- Teoria podobieństwa: premie dla obligacji o podobnym okresie zapadalności są podobne

Czas trwania (*duration*)

- Zauważmy, że w przypadku obligacji kuponowych czas trwania inwestycji jest w pewnym sensie krótszy niż w przypadku obligacji kuponowych o tym samym terminie zapadalności, ponieważ inwestor otrzymuje część wypłat w postaci kuponów przed wypłatą wartości nominalnej
- Miarą długości trwania inwestycji, która uwzględnia strukturę czasową wypłat jest czas trwania (duration)
- Załóżmy, że we wszystkich okresach trwania inwestycji mamy tę samą stopę procentową (równą wewnętrzej stopie zwrotu)
- Oznaczmy zlogarytmowaną wewnętrzną stopę zwrotu jako $r = ln(1 + y)$

Duracja (*duration*)

- Durację definiujemy jako zmianę wartości inwestycji (w %) wynikającej z niewielkiej (1%) zmiany stopy procentowej:

$$D = -\frac{\partial P}{\partial r} \Big/ P$$

- Dla inwestycji w obligację zerokuponową o zapadalności τ

$$P = \frac{M}{(1+y)^{\tau}} = exp\left(-\tau r\right) M$$

- Duracja w przypadku takiej inwestycji jest równa τ:

$$D = -\frac{\partial P}{\partial r} \Big/ P = \frac{\tau P}{P} = \tau$$

- Dla standardowej obligacji kuponowej

$$D = \sum^{n} t_i \frac{exp\left(-t_i r\right) C_i}{P} + t_\tau \frac{exp\left(-t_\tau\right) M}{P} = \frac{1}{P}\left(\sum^{\tau} t_i d\left(t_i\right) C_i + t_\tau d\left(t_\tau\right)\right.$$

Uodoparnianie portfela (*immunization*)

- Zauważmy, że z zmiany wartości portfela obligacji w reakcji na zmiany stopy procentowej może być przybliżony przy pomocy czasu trwania.
- Załóżmy, że

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} P_i(r)$$

- Z rozwinięcia Taylora

$$P_i(r_0 + \Delta r) \approx P_i(r_0) + \frac{\partial P_i(r_0)}{\partial r} \Delta r$$

$$\frac{P_i(r_0 + \Delta r) - P_i(r_0)}{P_i(r_0)} \approx \frac{\frac{\partial P_i(r_0)}{\partial r}}{P_i(r_0)} \Delta r = -D_i(r_0)\Delta r$$

Uodoparnianie portfela (*immunization*)

- A więc

$$\frac{P(r_0+\Delta r)-P(r_0)}{P(r_0)} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(r_0)}{P(r_0)} \frac{\frac{\partial P_i(r_0)}{\partial r}}{P_i(r_0)} \Delta r = -\sum w_i D_i \Delta r$$

- Widać z tego, że portfel będzie uodporniony na (małe) zmiany stopy procentowej jeśli czas trwania:

$$D = \sum w_i D_i = 0$$

Modelowanie krzywej dochodowości

- Zlogarytowana cena obligacji o zapadalności τ_n, z kuponami wypłacanymi $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ (2)

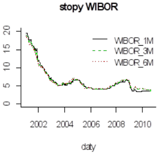
$$P_{t,\tau} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{C_{\tau_j}}{(1 + R_{t,\tau_j})^{\tau_j}} + \frac{M}{(1 + R_{t,\tau_n})^{\tau_n}} + \varepsilon_i$$

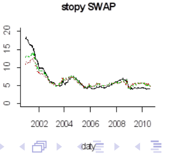
- Oszacowano dla pewnej formy funkcyjnej R_{t,τ_i}za pomocą ważonej nieliniowej metody najmniejszych kwadratów, przy czym wagami były o0dwrotności duracje poszczególnych obligacji (efektywność numeryczna)

Krzywa dochodowości - formy funkcyjne

- Serwisy informacyjne dostarczają szeregów czasowych oprocentowania jedynie dla standardowych terminów zapadalności τ.
- W wielu analizach, potrzebna jest informacja dotycząca poziomu stopy procentowej dla wszystkich terminów zapadalności.
- W praktyce dokonuje się więc estymacji zależności funkcji opisującej poziom stóp procentowej od okresu zapadalności na podstawie dostępnych obserwacji.
- Dwa najczęściej wykorzystywane modele to model Nelsona-Siegela (1987) oraz model Svenssona (1994)

Dane tygodniowe dla stóp procentowych o różnych terminach zapadalności





Model Nelsona-Siegela

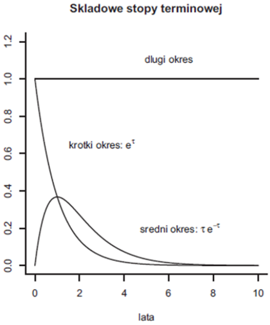
- Autorzy sugerują następujące kryteria doboru formy funkcyjnej
  - Funkcja $F_{t,\tau}$ powinna być dobrze dopasowana do występującej empirycznie zależności
  - Wartości funkcji $F_{t,\tau}$ powinny być dodatnie i ograniczone z dołu i z góry
  - Funkcja $F_{t,\tau}$ powinna mieć granicę dla terminów zapadalności dążących do nieskończoności

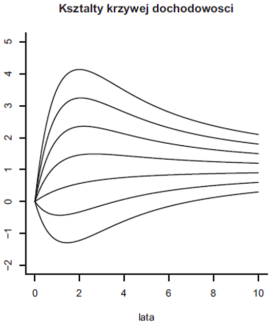
    $$lim_{\tau \to \infty} F_{t,\tau} = k$$

    gdzie k jest pewną stałą
  - Liczba parametrów szacowanych dla funkcji F powinna być jak najmniejsza

Forma funkcyjna modelu Nelsona-Siegela

$$F_t = \beta_0 + \beta_1 exp(-t/\lambda) + \beta_2(-t/\lambda)exp(-t/\lambda)$$





parametr λ opisuje tempo w jakim wartość stopy terminowej zbiega do swojej granicznej wartości

Model Nelsona-Siegela

- Zauważmy, że zlogarytmowana stopa procentowa spot dla terminu zapadalności τ jest równa

$$r_{0,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F_s ds$$

- Z formy funkcyjnej modelu Nelsona-Siegela wnioskujemy, że

$$r_{0,\tau} = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \beta_2 exp(-\tau/\lambda)$$

Model Svenssona

- Svensson (1994) rozszerzył model Nelsona-Siegela o składnik opisującego średniookresową zmienność stopy terminowej.

$$F_t = \beta_0 + \beta_1 exp(-t/\lambda_1) + \beta_2(-t/\lambda_1)\, exp(-t/\lambda_1) + \beta_3(t/\lambda_2)\, exp(-t/\lambda_2)$$

- a wiec dla $r_{0,\tau}$

$$r_{0,\tau} = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - exp(-t/\lambda_1)}{t/\lambda_1} - \beta_2\left(\frac{1 - exp(-t/\lambda_1)}{t/\lambda_1} - exp(-t/\lambda_1)\right) + \beta_3\left(\frac{1 - exp(-t/\lambda_2)}{t/\lambda_2} - exp(-t/\lambda_2)\right)$$

Model Nelsona-Siegla oraz Svenssona dla polskich danych dla pierwszej i ostatniej obserwacji

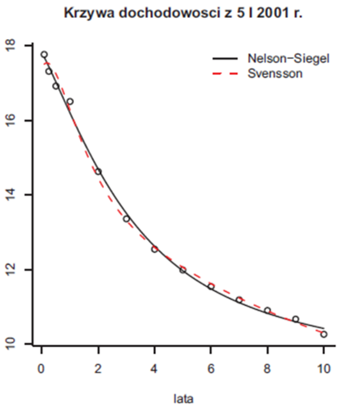
Oszacowanie modelu Nelsona-Siegela

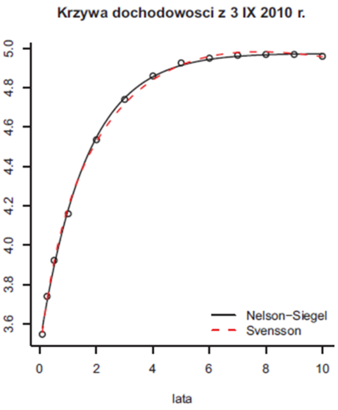
	beta_0	beta_1	beta_2	lambda
Krzywa z 5.I.2001	8.76	9.07	5.74	0.075
Krzywa z 3.IX.2010	4.96	-1.46	1.56	0.050

Oszacowanie modelu Svenssona

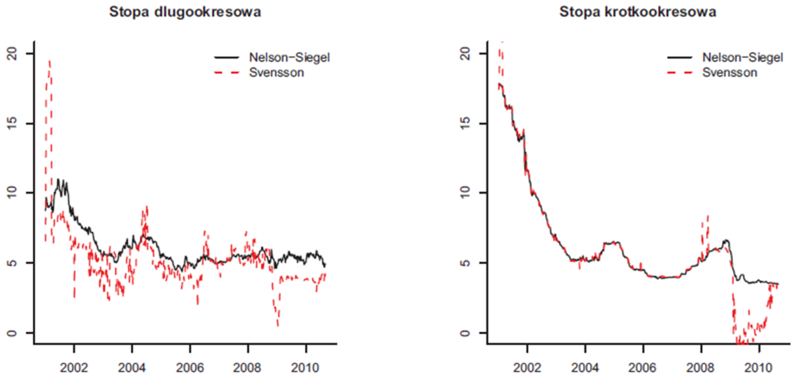
	beta_0	beta_1	beta_2	beta_3	tau1	tau2
Krzywa z 5.I.2001	6.59	10.8	10.7	10.3	6.69	33.5
Krzywa z 3.IX.2010	4.08	-0.62	0.29	3.11	6.69	50.2

Dopasowanie modeli do krzywej dochodowości w Polsce





Wykres dla długo- oraz krotkookresowej stopy procentowej



Model oczekiwanej stopy procentowej

- Załóżmy, że

$$k_{t+i} = r_{t+i} + T_{t+i,\tau}$$

  gdzie
  - r_{t+i} jest stopą wolną od ryzyka w czasie $t+i$ a
  - T_{t+i}, τ jest premią terminową w czasie $t+i$ dla obligacji o terminie zapadalności τ
- Załóżmy ponadto, że

$$T_{t+i,\tau} = T$$

- Przy tych założeniach cena racjonalna *ex post* (zwana też *perfect foresight price*) jest równa

$$P^*_{t,\tau} = \sum_{j=1}^{\tau} \frac{C_{t+j}}{\prod_{i=0}^{j}(1+k_{t+i})} + \frac{M}{\prod_{i=0}^{\tau-1}(1+k_{t+i})}$$

Testy

- Weryfikację teorii można teraz przeprowadzić np.:
  - na podstawie testu analogicznego do testu Shillera w przypadku rynku akcji poprzez weryfikację tego, że $Var\left(P_{t,\tau}\right) \leq Var\left(P^*_{t,\tau}\right)$
  - weryfikując hipotezę efektywnego rynku poprzez testowanie

$$P_{t,\tau} - P^*_{t,\tau} = a + bP_{t,\tau} + cI_t + \varepsilon_t$$

gdzie I_t oznacza zbiór informacyjny w czasie t i dla H_0 o efektywności oczekujemy, że $a = b = c = 0$