Modele CAPM i APT

Jerzy Mycielski

28 listopada 2019

Założenia CAPM

- Inwestorzy mają homogeniczne oczekiwania
- Jedyną miarą ryzyka jest wariancją
    - Inwestycja A nie gorsza od inwestycji B jeśli stopy zwrotu R_A i R_B spełniają:
        1. $E(R_A) \geq E(R_B)$
        2. $Var(R_A) \leq Var(R_B)$
- Koszty transakcyjne są równe zeru
- Istnieje aktywo wolne od ryzyka przynoszące dochód R_0
- Inwestorzy mogą się dowolnie zadłużać przy stopie procentowej równej R_0
- Inwestorzy mogą charakteryzować się różnym stopniem awersji do ryzyka

CAPM: oznaczenia

- x_0 jest kapitałem początkowym (zainwestowanym w bezpieczne aktywo)
- y jest kapitałem zainwestowanym w portfel aktywów ryzykownych
- $\mathbf{x}$ jest wektorem zawierającym proporcje wielkości inwestycji w poszczególne aktywa (elementy $\mathbf{x}$ sumują się do 1)
- $\mathbf{R}, \overline{\mathbf{R}}$ wektorem zwrotów i oczekiwanych zwrotów z poszczególnych aktywów
- $\mathbf{x}'\mathbf{R}, \mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}}$ stopą zwrotu i oczekiwaną stopą zwrotu z portfela aktywów ryzykownych

CAPM: Problem optymalizacyjny

- Inwestor szuka takiego portfela, który przy danej danej stopie zwrotu charakteryzuje się najniższym ryzykiem
- Równoważny problem dualny sprowadza się do szukania portfela o danym ryzyku ale najwyższej stopie zwrotu

$$\max_{y,\mathbf{x}} y\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} + (x_0 - y)\, R_0$$

$$s.t. \begin{cases} Var\left(y\mathbf{x}'\mathbf{R} + (x_0 - y)\, R_0\right) = y^2\mathbf{x}'\, Var\left(\mathbf{R}\right)\mathbf{x} & = \sigma^2 \\ \mathbf{1}'\mathbf{x} & = 1 \end{cases}$$

CAPM: Funkcja Lagrange'a i warunki pierwszego rzędu

- Funkcja Lagrange'a

$$L = y\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} + (x_0 - y)\,R_0 + \lambda_1\left(\sigma^2 - y^2\mathbf{x}'\,Var\,(\mathbf{R})\,\mathbf{x}\right) + \lambda_2\left(1 - \mathbf{1}'\mathbf{x}\right)$$

- Warunki pierwszego rzędu

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = y\overline{\mathbf{R}} - 2\lambda_1 y^2\,Var\,(\mathbf{R})\,\mathbf{x} - \lambda_2\mathbf{1} = \mathbf{0}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} - R_0 - 2\lambda_1 y\mathbf{x}'\,Var\,(\mathbf{R})\,\mathbf{x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sigma^2 - y^2\mathbf{x}'\,Var\,(\mathbf{R})\,\mathbf{x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{1}'\mathbf{x} = 0$$

CAPM: Układ równań

- Układ równań

$$y\overline{\mathbf{R}} - \lambda_2 \mathbf{1} = 2\lambda_1 y^2 Var(\mathbf{R})\mathbf{x} \tag{1}$$
$$\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} - R_0 = 2\lambda_1 y \mathbf{x}' Var(\mathbf{R})\mathbf{x} \tag{2}$$
$$\sigma^2 = y^2 \mathbf{x}' Var(\mathbf{R})\mathbf{x} \tag{3}$$
$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = 1 \tag{4}$$

- Mnożąc równanie (1) lewostronnie przez $\mathbf{x}'$, wykorzystując rówanie (4) i dzieląc uzyskane równanie stronami przez rówanie (2) otrzymujemy:

$$\frac{y\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} - \lambda_2}{\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} - R_0} = y$$

- Rozwiązując dla λ_2 otrzymujemy, że $\lambda_2 = yR_0$

CAPM: rozwiązanie dla $\mathbf{x}$

- Rozwiązując równanie (1) dla $\mathbf{x}$ i podstawiając wynik dla λ_2 otrzymujemy

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\lambda_1 y} Var^{-1}(\mathbf{R})\left(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{1}R_0\right) \tag{5}$$

- Mnożąc obie strony tego równania przez $\mathbf{1}'$ i wykorzystując równanie (4) otrzymujemy:

$$2\lambda_1 y = \mathbf{1}' Var^{-1}(\mathbf{R})\left(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{1}R_0\right)$$

- Podstawiając ten wynik do równania (5)

$$\mathbf{x} = \frac{Var^{-1}(\mathbf{R})\left(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{1}R_0\right)}{\mathbf{1}' Var^{-1}(\mathbf{R})\left(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{1}R_0\right)}$$

CAPM: rozwiązanie dla y

- Wstawiając uzyskany wynik do równania (3) i rozwiązując dla y

$$y = \frac{\left[\mathbf{1}' Var^{-1}(\mathbf{R})\left(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{1}R_0\right)\right]\sigma^2}{\sqrt{\left(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{1}R_0\right)' Var^{-1}(\mathbf{R})\left(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{1}R_0\right)}}$$

- Zauważmy, że y nie zależy od x_0.

CAPM: Zasada rozdzielenia (separation principle)

- Wyprowadzony wzór implikuje, że proporcje $\mathbf{x}$ między środkami zainwestowanymi w poszczególne papiery wartościowe jest całkowicie zdeterminowny przez wielkości $Var(\mathbf{R})$, $\overline{\mathbf{R}}$ i R_0
- σ^2 będąca miarą awersji do ryzyka inwestora i x_0 mierząca jego bogactwo nie wpływają na skład optymalnego portfela aktywów ryzykownych.
- Decyzje inwestora można podzielić więc na dwa etapy:
  1. wybór proporcji między inwestycjami w poszczególne aktywa ryzykowne
  2. ustalenie kwot do zainwestowania w portfel aktywów ryzykownych i aktywo bezpieczne

Zasada rozdzielenia c.d.

- Jeśli spełnione są założenia CAPM to wybór podejmowany przez inwestorów na pierwszym etapie jest dla wszystkich taki sam i niezależny od preferencji względem ryzyka oraz ich początkowego bogactwa
- Wynika z tego, że skoro wszyscy inwestorzy mają portfele aktywów ryzykownych o identycznym składzie to proporcje aktywów w tym portfelu muszą być tożsame z proporcjami kapitalizacji poszczególnych akcji na rynku
- **Wniosek:** portfel optymalny ma ten sam skład co portfel rynkowy

CAPM: Wnioski

- Oznaczmy portfel $\mathbf{x}$ optymalny, taki sam dla każdego inwestora, jako $\mathbf{x}_e$ i nazwijmy go potfelem rynkowym
- Potfel rynkowy, to portfel zawiarający aktywa w tych samych proporcjach co ich kapitalizacje na rynku
- Oznaczmy jako $\overline{R}_e = \mathbf{x}_e\overline{\mathbf{R}}$, $R_e = \mathbf{x}_e\mathbf{R}$ interpretujemy jako zwrot z portfela rynkowego
- Mnożąc równanie (1) przez $\mathbf{x}'$ i wstawiając równanie (3) oraz wykorzystując to, że $\lambda_2 = yR_0$ i rozwiązując dla λ_1 otrzymujemy

$$\lambda_1 = y\left(\frac{\overline{R}_e - R_0}{2\sigma^2}\right)$$

CAPM: Wnioski c.d.

- Wstawiając powyższy wynik do równania (1), wykorzystując wynik dla λ_1 i λ_2 oraz dzieląc równanie przez y otrzymujemy

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{I}R_0 + y^2 \frac{Var(\mathbf{R})\mathbf{x}_e}{\sigma^2}\left(\overline{R}_e - R_0\right)$$

- Wykorzystując równanie (3) uzyskujemy, że

$$y^2 = \frac{\sigma^2}{\mathbf{x}_e' Var(\mathbf{R})\mathbf{x}_e}$$

- Podstawiając do poprzedniego równania otrzymujemy wzór oczekiwaną stopę zwrotu z aktywów:

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{I}R_0 + \frac{Var(\mathbf{R})\mathbf{x}_e}{\mathbf{x}_e' Var(\mathbf{R})\mathbf{x}_e}\left(\overline{R}_e - R_0\right)$$

CAPM: Wnioski

- Zauważmy teraz, że

$$\mathbf{x}_e' Var(\mathbf{R})\mathbf{x}_e = Var(\mathbf{x}_e'\mathbf{R}) = Var(R_e)$$

- Element i wektora $Var(\mathbf{R})\mathbf{x}_e$ jest równy

$$Cov(R_i, \mathbf{x}_e'\mathbf{R}) = Cov(R_i, R_e)$$

- Wynika z tego, że

$$\begin{aligned} \overline{R}_i &= R_0 + \frac{Cov(R_i, R_e)}{Var(R_e)}(\overline{R}_e - R_0) \\ &= R_0 + \beta_i(\overline{R}_e - R_0) \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $\beta_i = \frac{Cov(R_i,R_e)}{Var(R_e)}$

- Równanie (6) nazywamy Security Market Line (SML)

Model Markowitza

- Problem maksymalizacyjny podziale bogactwa y pomiędzy aktywa tak, by zmaksymalizować zwrot przy określonym σ^2
- Problem ten można zapisać następująco

$$\max_{\mathbf{x}} y\mathbf{x}\overline{\mathbf{R}}$$
$$s.t. \begin{cases} Var(\mathbf{x}'\mathbf{R}) = y^2\mathbf{x}' Var(\mathbf{R})\mathbf{x} & = \sigma^2 \\ \mathbf{1}'\mathbf{x} & = 1 \end{cases}$$

- W dalszej części tak normalizujemy y i $\mathbf{x}$, by $y = 1$ (optymalny sposób zainwestowania jednego \$)

Model Markowitza, warunki pierwszego rzędu

- Funkcja Lagrange'a

$$L = \mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} + \lambda_1 \left(\sigma^2 - y^2 \mathbf{x}' Var(\mathbf{R})\mathbf{x}\right) + \lambda_2 \left(1 - \mathbf{1}'\mathbf{x}\right)$$

- Warunki pierwszego rzędu

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \overline{\mathbf{R}} - 2\lambda_1 Var(\mathbf{R})\mathbf{x} - \lambda_2 \mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sigma^2 - \mathbf{x}' Var(\mathbf{R})\mathbf{x} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{1}'\mathbf{x} = 0 \tag{9}$$

Model Markowitza: częściowe rozwiązanie

- Mnożąc warunek (7) przez $\mathbf{x}'$ i wykorzystując warunki (8) (9) i rozwiązując dla λ_1 otrzymujemy

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} - \lambda_2}{2\sigma^2}$$

Model Markowitza: częściowe rozwiązanie

- Wykorzystując pierwszy warunek otrzymamy następujący warunek

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{R}} &= 2\lambda_1 Var(\mathbf{R})\mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{1} \\
&= \left(\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} - \lambda_2\right) \frac{Var(\mathbf{R})\mathbf{x}}{\sigma^2} + \lambda_2 \mathbf{1} \qquad (10) \\
&= \frac{Cov(\mathbf{R}, R^*)}{Var(R^*)} \left(\overline{R}^* - \lambda_2\right) + \lambda_2 \mathbf{1} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

gdzie zwrot z optymalnego portfela $\mathbf{x}^*$ oznaczyliśmy $R^* = \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{R}$ a oczekiwany zwrotu $\overline{R}^* = \mathbf{x}^{*\prime}\overline{\mathbf{R}}$ przez

Model Markowitza: rozwiązanie dla R^*

- Mnożac obie strony równania (10) otrzymujemy (zakładamy, że $Var(\mathbf{R})$ jest nieosobliwe)

$$\overline{\mathbf{R}}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}\overline{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sigma^2}\overline{R}^*\left(\overline{R}^* - \lambda_2\right) + \lambda_2\overline{\mathbf{R}}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}\mathbf{1}$$

- Mnożąc to samo równanie przez $\mathbf{1}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}$

$$\mathbf{1}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}\overline{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\overline{R}^* - \lambda_2\right) + \lambda_2\mathbf{1}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}\mathbf{1}$$

- Wprowadzając oznaczenia

$$\alpha = \mathbf{1}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}\mathbf{1}, \beta = \overline{\mathbf{R}}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}\mathbf{1}, \gamma = \overline{\mathbf{R}}'[Var(\mathbf{R})]^{-1}\overline{\mathbf{R}}$$

Model Markowitza: rozwiązanie dla R^*

- Dwa powyższe równania można zapisać jako układ równań:

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^2}\left(\overline{R}^* - \lambda_2\right)\overline{R}^* + \lambda_2\beta \qquad (12)$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma^2}\left(\overline{R}^* - \lambda_2\right) + \lambda_2\alpha \qquad (13)$$

- Rozwiązując (13) dla λ_2 otrzymujemy

$$\lambda_2 = \frac{\sigma^2\beta - \overline{R}^*}{\sigma^2\alpha - 1}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma^2\overline{\mathbf{R}}'\left[Var\left(\mathbf{R}\right)\right]^{-1}\mathbf{1} - \overline{R}^*}{\sigma^2\mathbf{1}'\left[Var\left(\mathbf{R}\right)\right]^{-1}\mathbf{1} - 1}$$

$$\left(\mathbf{x}'\overline{\mathbf{R}} - \frac{\sigma^2\overline{\mathbf{R}}'\left[Var\left(\mathbf{R}\right)\right]^{-1}\mathbf{1} - \overline{R}^*}{\sigma^2\mathbf{1}'\left[Var\left(\mathbf{R}\right)\right]^{-1}\mathbf{1} - 1}\right)\frac{Var\left(\mathbf{R}\right)\mathbf{x}}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2\overline{\mathbf{R}}'\left[Var\left(\mathbf{R}\right)\right]^{-1}\mathbf{1} - \overline{R}}{\sigma^2\mathbf{1}'\left[Var\left(\mathbf{R}\right)\right]^{-1}\mathbf{1} - 1}$$

Model Markowitza: rozwiązanie dla R^*

- Podstawiając do (12) i upraszczając otrzymujemy następujące równanie kwadratowe względem $\overline{R}^*$

$$0 = \alpha\left(\overline{R}^*\right)^2 - 2\beta\overline{R}^* + \sigma^2\beta^2 - \left(\sigma^2\alpha - 1\right)\gamma$$

- Wykorzystując standardowe wzory uzyskujemy następującą zależność między stopą zwrotu z portfela a ryzykiem akceptowanym przez inwestora:

$$\overline{R}^* = \frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma - \delta\sigma^2}{\alpha}}$$

gdzie $\delta = \gamma\alpha - \beta^2$.

- Uzyskany wzór możemy wykorzystać do wyznaczenia tak zwanego Efficient Frontier (EF)

Model Markowitza: rozwiązanie dla x^*

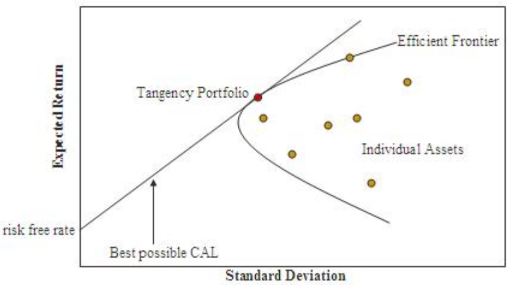
- Mnożąc równanie (10) lowostronnie przez $[Var(\mathbf{R})]^{-1}$, rozwiązując dla $\mathbf{x}$ i wykorzystując otrzymane wcześniej rozwiązanie dla $\overline{R}^*$ i oznaczając przez λ_2^* wielkość λ_2 dla $\overline{R}^*$ otrzymujemy wzór na skład optymalnego portfela:

$$\mathbf{x}^* = [Var(\mathbf{R})]^{-1} \left(\overline{\mathbf{R}} - \lambda_2^* \mathbf{1}\right) \frac{\sigma^2}{\overline{R}^* - \lambda_2^*}$$

- W ogólnym przypadku skład portfela optymalnego $\mathbf{x}^*$ zależy od awersji do ryzyka mierzonej σ^2.

Efficient frontier, Capital Allocation Line (CAL)

- Dla danego zestawu aktywów można wyznaczyć najlepsze możliwe kombinacje ryzyka (σ^2) i oczekiwanej stopy zwrotu



Rozwiązanie Modelu Markowitza, ograniczenia

- Założyliśmy, że macierz $Var(\mathbf{R})$ jest macierzą nieosobliwą
  - niemożliwe występowania aktywów pozbawionych ryzyka
  - niemożliwe występowanie portfeli ortogonalnych (portfeli o zarowych kowariancjach)
- Zakładamy, że możliwe jest zadłużanie się w dowolnych aktywach (pozycje short), $\mathbf{x}$ może mieć elementy ujemne
- Wprowadzenie ograniczenia, że $\mathbf{x}$ ma nieujemne elementy prowadzi do problemu, który w ogólnym przypadku nie ma rozwiązania analitycznego, można go jednak rozwiązać metodami numerycznymi
- Rezygnacja z założenie o nieosobliwości $Var(\mathbf{R})$ prowadzi do zerobetowego CAPM i CAPM.

Zerobetowy CAPM: portfel zerobetowy

- Załóżmy, że istnieje aktywo wolne od ryzyka ale inwestor może w nie inwestować ale nie może się na nim zapożyczać
- Zauważmy dodatkowo, że każdy portfel leżący na efektywnej granicy może być skonstruowany z dowolnych dwóch innych portfeli zlokalizowanych na tej granicy

$$\overline{\mathbf{R}} = \left(\mathbf{x}_1'\overline{\mathbf{R}} - \lambda_2\right)\frac{Var\left(\mathbf{R}\right)\mathbf{x}_1}{\sigma_1^2} + \lambda_2\mathbf{1}$$

$$\overline{\mathbf{R}} = \left(\mathbf{x}_2'\overline{\mathbf{R}} - \lambda_2\right)\frac{Var\left(\mathbf{R}\right)\mathbf{x}_2}{\sigma_2^2} + \lambda_2\mathbf{1}$$

- Skonstrujmy portfel aktywów (portfel zerobetowy) $\mathbf{x}^z$, $\mathbf{1}'\mathbf{x}^z = 1$ taki że zwrot z tego portfela jest nieskorelowany (ortogonalny) do zwrotów z wybranego (dla inwestora o pewnym poziomie ryzyka) optymalnego portela $\mathbf{x}^*$
- Zwroty z portfela $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^z$ oznaczmy przez $R^* = \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{R}$, $R^z = \mathbf{x}^{z\prime}\mathbf{R}$.

Zerobetowy CAPM: rozwiązanie

- λ_2 jest równa oczekiwanemu zwrotowi z portfela zerobetowego $y\overline{R}^z$ a równanie dla $\overline{\mathbf{R}}$ można zapisać:

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{1}\overline{R}^z + \frac{Cov\left(\mathbf{R}, R^*\right)}{Var\left(R^*\right)}\left(\overline{R}^* - \overline{R}^z\right)$$

- Zauważmy, że zarówno ten układ równań jak i warunki, które musi spełniać portfel zerobetowy nie zależą od σ^2
- Dla poszczególnych aktywów

$$\overline{R}_i = \overline{R}^z + \frac{Cov\left(R_i, R^*\right)}{Var\left(R^*\right)}\left(\overline{R}^* - \overline{R}^z\right)$$

- UWAGA: portfele $\mathbf{x}^*$ i nie są $\mathbf{x}^z$ nie są unikalne. Inwestor może wybrać spośród wielu możliwych $\mathbf{x}^*$ i $\mathbf{x}^z$.
- Nie zakładamy nieosobliwości macierzy $Var\left(\mathbf{R}\right)$

Zerobetowy CAPM: Wnioski

- W przypadku kiedy nie ma aktywa pozbawionego ryzyka, optymalne portfele inwestorów mogą być różne
- W dalszym ciągu obowiązuje zasada rozdzielenia
  - inwestor wybiera swój portfel $\mathbf{x}^*$ i zerobetowy portfel $\mathbf{x}^z$ niezależnie od swojej awersji do ryzyka i bogactwa y
  - przy założeniu efektywności rynku, dla portfela $\mathbf{x}^*$ tożsamego z portfelem rynkowym powinno być spełnione, że

$$\overline{R}_i = \overline{R}^z + \beta_i \left(\overline{R}_e - \overline{R}^z \right) \tag{14}$$

CAPM: weryfikacja

- Z postaci modelu CAPM i przy założeniu racjonalności oczekiwań wynika, że

$$R_{i,t} - R_{0,t} = \beta_i \left(R_{et} - R_{0,t} \right) + \varepsilon_t$$

- Dla zerobetowego CAPM analogiczne równanie wygląda następująco

$$R_{i,t} - R_t^z = \beta_i \left(R_{et} - R_t^z \right) + \varepsilon_t$$

- Dla CAPM przeprowadzamy regresje

$$R_{i,t} - R_{0,t} = \alpha_i + \beta_i \left(R_{et} - R_{0,t} \right) + \varepsilon_t$$

- Otrzymujemy dla każdego aktywa oszacowanie $\widehat{\beta}_i$.

CAPM: weryfikacja

- Następnie dla uśredniamy dane po czasie i przeprowadzamy regresję dla wszystkich aktywów

$$\widehat{\overline{R}}_i = \phi_0 + \phi_1 \widehat{\beta}_i + v_i \tag{15}$$

- Z kolei uśredniona po czasie postać CAPM wygląda następująco:

$$\widehat{\overline{R}}_i = \widehat{\overline{R}}_0 + \beta_i \left(\widehat{\overline{R}}_e - \widehat{\overline{R}}_0 \right)$$

  gdzie $\widehat{\overline{R}}_i$,$\widehat{\overline{R}}_0$ i $\widehat{\overline{R}}_e$ są zaobserwowanymi średnimi stopami zwrotu z danego aktywa i, z aktywa pozbawionego ryzyka i z portfela rynkowego

- Jeśli CAPM jest prawdziwy to $\phi_0 = \widehat{\overline{R}}_0$ a $\phi_1 = \widehat{\overline{R}}_e - \widehat{\overline{R}}_0$.

CAPM: weryfikacja

- Równanie (15) można rozbudować

$$\widehat{\overline{R}}_i = \phi_0 + \phi_1 \widehat{\beta}_i + \phi_2 \widehat{\beta}_i^2 + \phi_3 \widehat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2 + v_i$$

gdzie $\widehat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$ jest oszacowaną dywersyfikowalną zmiennością aktywa i

- W tym przypadku oczekujemy, że $\phi_2 = 0$ i$\phi_3 = 0$.

Zerobetowy CAPM: weryfikacja

- Załóżmy, że istnieje aktywo o najniższym ryzyku i stopie zwrotu $R_{0,t}$
- Dla zerobetowego CAPM szacujemy na szeregach czasowych przekształcone równania (14)

$$R_{i,t} = \alpha_i + (1-\beta_i)\,R_{0,t} + \beta_i R_{e,t} + \varepsilon_{i,t}$$

przy czym

$$\alpha_i = \left(R^z_{i,t} - R_{0,t}\right)(1-\beta_i)$$

- Ponieważ $R^z_{i,t} - R_{0,t} > 0$ więc $\alpha_i > 0$ jeśli $\beta_i < 1$ a $\alpha_i < 0$ jeśli $\beta_i > 1$.

Teoria arbitrażu cenowego (APT)

- Załóżmy, że stopa zwrotu dla aktywa i jest dana wzorem

$$R_{it} = a_i + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} F_{jt} + \varepsilon_{it}$$

- Licząc oczekiwania, odejmując stronami i zakładając, że $E\left(\varepsilon_{it}\right) = 0$ otrzymujemy:

$$R_{it} = E\left(R_{it}\right) + \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\left(F_{jt} - E\left(F_{jt}\right)\right) + \varepsilon_{it}$$

- Załóżmy, że liczba czynników jest wystarczająca by:

$$E\left(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}\right) = 0$$

$$E\left[\varepsilon_{it}\left(F_{jt} - E\left(F_{jt}\right)\right)\right] = 0$$

Portfel arbitrażowy

- Skonstruujmy portfel o następujących własnościach

$$\sum_{i=1}^{s} z_i b_{ij} = 0 \text{ dla wszystkich } j$$

$$\sum_{i=1}^{s} z_i = 0$$

- Partfel taki określany jest jako zeroinwestycyjny portfel zerobetowy

Zwrot z portfela arbitrażowego

- Zwrot z portfela

$$R_t^p = \sum_{i=1}^{s} z_i R_{it} = \sum_{i=1}^{s} z_i \left[E(R_{it}) + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} (F_{jt} - E(F_{jt})) \right]$$
$$= \sum_{i=1}^{s} z_i E(R_{it}) + \sum_{j=1}^{k} (F_{jt} - E(F_{jt})) \sum_{i=1}^{s} z_i b_{ij} + \sum_{i=1}^{s} z_i \varepsilon_{it}$$
$$= \sum_{i=1}^{s} z_i E(R_{it})$$

- Przy czym założyliśmy, że dla liczby rozpatrywanych aktywów $\sum_{i=1}^{s} z_i \varepsilon_{it} \xrightarrow{p} 0$

Warunek braku arbitrażu

- Wartość inwestycji wyniosła zero
- Uzyskany zwrot jest pewny (pozbawiony ryzyka)
- Z warunku braku arbitrażu wynika, że

$$R_t^p = \sum_{i=1}^{s} z_i E\left(R_{it}\right) = E\left(R_t^p\right) = 0$$

APT: wnioski

- Z konstrukcji portfela wynika, że

$$\sum_{i=1}^{s} z_i b_{ij} = 0 \text{ dla wszystkich } j$$

$$\sum_{i=1}^{s} z_i = 0$$

- Z warunku braku arbitrażu zaś, że

$$\sum_{i=1}^{s} z_i E\left(R_{it}\right) = 0$$

APT: wnioski c.d.

- Zapiszmy te ograniczenia w postaci macierzowej

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E(R_{1t}) & E(R_{2t}) & \cdots & E(R_{st}) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{s1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{sk} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

- Zauważmy, że macierz $\mathbf{A}$ powyżej ma wymiar $(k+2) \times s$.

APT: wnioski

- Załóżmy, że liczba aktywów w zerobetowym portfelu zeroinwestycyjnym jest równa $s = k + 2$
- Układ równań jest rozwiązywalny tylko wtedy, gdy macierz A jest osobliwa a zatem rząd tej macierzy jest mniejszy lub równy $k + 1$
- Wynika z tego, że wiersze macierzy $\mathbf{A}$ są liniowo zależne a tym samym istnieją takie λ_i, że

$$E\left(R_{it}\right) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{ij}$$

APT: szacowanie λ

- Dla każdego aktywa szacujemy równanie

$$R_{it} = a_i + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} F_{jt} + \varepsilon_{it} \tag{16}$$

- Czynnikami uwzględnionymi mogłyby być zmienne wpływające na zyski firmy: stopa procentowa, wzrost produkcji przemysłowej, inflacja, bety etc.
- Następnie, mając b_{ij} szacujemy równanie

$$E(R_{it}) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} \lambda_j \tag{17}$$

wykorzystując zamiast $E(R_{it})$ średnie dla wartości stóp zwrotów dla poszczególnych aktywów.

APT: szacowanie λ

- Można także oszaacować cały układ równań w jednym kroku wykorzystując do tego analizę czynnikową (ortogonalne czynniki wyjaśniające największą część wariancji)

APT i CAPM

- APT opiera się głównie na założeniu o braku arbitrażu
- APT nie opiera się na założeniach o funkcji użyteczności ani nie zakłada, że inwestorzy biorą pod uwagę jedynie oczekiwany zwrot i wariancję portfela.
- APT wymaga założenia o homogenicznych oczekiwaniach
- CAPM jest szczególnym przypadkiem APT (jedyny czynnik, to zwrot rynkowy), w ogólnym przypadku jest sprzeczny z APT
- APT jest trudny w implementacji:
  - jakie czynniki uwzględnić?
  - Jak interpretować b_{ij} i λ_j?

Testowanie APT

- Duża część testów APT dotyczyła pytania, czy faktycznie poza zwrotem rynkowym istnieją jeszcze inne czynniki wpływające na zwrot z portfela (APT vs CAPM)
- Test taki można przeprowadzić
  - uwzględniając wśród czynników w równaniu (16) zwrot rynkowy oraz inne czynniki
  - testując istotność tych dodatkowych czynników w równaniu (17)