Testy pierwiastka jednostkowego

Jerzy Mycielski

2 listopada 2017

Słaba efektywność rynkowa i błądzenie przypadkowe

- Załóżmy, że rynek jest słabo efektywny
- Logarytmicznej stopy zwrotu ($\triangle p_t = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$) w czasie t nie da się przewidzieć na podstawie stóp zwrotu znanych w czasie $t-1$:

$$E\left(\triangle p_t \middle| \triangle p_{t-1}, \ldots\right) = \mu$$

- Wynika z tego, że

$$E\left(p_t \middle| p_{t-1}, \ldots\right) - p_{t-1} = \mu$$

- Dodając do obu stron p_t i przenosząc wartość oczekiwaną na drugą stronę otrzymujemy:

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \left[p_t - E\left(p_t \middle| p_{t-1}, \ldots\right)\right]$$

Słaba efektywność rynkowa i błądzenie przypadkowe

- Oznaczając błędy predykcji przez:

$$\varepsilon_t = p_t - E\left(p_t | p_{t-1}, \ldots\right)$$

otrzymujemy

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \varepsilon_t$$

lub

$$\triangle p_t = \mu + \varepsilon_t$$

- Zauważmy, że

$$E\left(\varepsilon_t | p_{t-1}, \ldots\right) = E\left(p_t | p_{t-1}, \ldots\right) - E\left(p_t | p_{t-1}, \ldots\right) = 0$$

$$E\left[E\left(\varepsilon_t | p_{t-1}, \ldots\right)\right] = E\left(0\right) = 0$$

a więc błędy ε_t są nieskorelowane z historycznymi cenami/stopami zwrotu i mają oczekiwaną wartość oczekiwaną równą zero

Słaba efektywność rynkowa i błądzenie przypadkowe

- Dla $s > t$

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) &= E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = E[E(\varepsilon_t \varepsilon_s | p_{s-1}, \ldots)] \\ &= E[\varepsilon_t E(\varepsilon_s | p_{s-1}, \ldots)] = E(0) = 0 \end{aligned}$$

ponieważ dla zbioru informacji z okresu $s - 1 \geq t$, p_t a więc i ε_t jest znane.

- Implikuje to, że także

$$Cov(\triangle p_t, \triangle p_s) = Cov(\mu + \varepsilon_t, \mu + \varepsilon_s) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$$

- Jeśli dodatkowo założymy, że $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$, to$\varepsilon_t$ jest (słabym) białym szumem a zatem p_t jest dane błądzeniem przypadkowym z dryfem.

Słaba efektywność rynkowa i błądzenie przypadkowe

Wniosek

Hipoteza o efektywności rynkowej implikuje, że ceny zachowują się zgodnie z procesem błądzenia stochastycznego z dryfem więc jest niestacjonarny i $I(1)$. Stopy zwrotu są nieskorelowane i stacjonarne.

- Zauważmy, że dla błądzenia losowego i $y_0 = 0$

$$p_t = y_0 + \sum_{s=1}^{t} \varepsilon_t$$

$$Var(p_t) = Var\left(\sum_{s=1}^{t} \varepsilon_t\right) = \sum_{s=1}^{t} Var(\varepsilon_t) = t\sigma^2$$

- Jeśli p_t jest stacjonarne to z definicji stacjonarności

$$Var(p_t) = \sigma^2$$

Wnioski

- Jeśli ceny są stacjonarne,
  - to warunek efektywności rynkowej jest niespełniony
  - wariancja bezwarunkowa cen jest stała w czasie
- Jeśli cen są dane błądzeniem przypadkowym z dryfem
  - warunek efektywności rynkowej jest spełniony
  - wariancja bezwarunkowa cen rośnie wprost proporcjonalnie do czasu
- Zauważmy jednak, że występowanie pierwiastka jednostkowego nie dowodzi efektyności rynkowej np. proces

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \alpha \triangle y_{t-1} + \varepsilon_t$$

zawiera pierwiastek jednostkowy (współczynnik przy y_{t-1}równy 1) ale zwroty są nim częściowo przewidywalne:

$$\triangle y_t = \mu + \alpha \triangle y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Testy oparte na testowaniu istotności korelacji

- Jeśli prawdziwa jest hipoteza o efektywności rynkowej, to przychody powinny być nieskorelowane
- Wynika z tego, że w modelu:

$$\triangle p_t = \mu + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \triangle p_{t-i} + \varepsilon_t$$

  prawdziwa powinna być hipoteza

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$$

  oraz błędu losowe powinny być nieskorelowane
- Testując H_0 oraz hipotezę o braku autokorelacji ε_t testujemy zatem hipotezę o efektywności słabej
- Wada tego podejścia: test ten jest prawidłowy jeśli prawidłowo sformułowany jest model kształtowania się cen.

Test serii

- Załóżmy, że mamy zmienną losową, która może przyjmować wartości ujemne i dodatnie
- Nazwijmy serią zbiór następujących po sobie obserwacji o tym samym znaku np. w ciagu

$$++++---+++--++++++-----$$

mamy 6 serii

Test serii c.d.

- Jeśli ciąg zmiennych losowych ma elementy niezależne to liczba serii ma w przybliżeniu rozkład normalny o wartości oczekiwanej
$$\mu = \frac{2N_+N_-}{N} + 1$$
i wariancji
$$\sigma^2 = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{N-1}$$
gdzie N to liczba obserwacji, N_+ liczba obserwacji dodatnich, N_- liczba obserwacji ujemnych
- Znany jest także małopróbkowy rozkład testu serii
- Wykorzystujemy, go do weryfikacji niezależności zwrotów $\triangle y_t$

Testy ilorazu wariancji

- Jeśli rzeczywiście ceny zachowują się zgodnie z modelem błądzenia przypadkowego, to

$$Var\left(p_t - p_{t-q}\right) = Var\left(\sum_{i=0}^{q} \varepsilon_{t-q}\right) = q\sigma^2$$

- Zdefiniujmy

$$\sigma^2\left(q\right) = \frac{1}{q} Var\left(p_t - p_{t-1}\right)$$

- Wtedy dla błądzenia przypadkowego $\sigma^2\left(q\right) = \sigma^2$

Test ilorazu wariancji c.d.

- W szczególności iloraz wariancji

$$VR = \frac{\sigma^2(q)}{\sigma^2(1)} = 1$$

- Lo i MacKinlay zaprojektowali statystykę

$$\frac{\widehat{VR}(q) - 1}{\widehat{Var}\left(\widehat{VR}(q)\right)} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Standardowe testy pierwiastka jednostkowego

- Nelson i Plosser (1982)
- Test ADF (parametryczna poprawka dla autokorelacji ε_t)

$$\triangle y_t = y_{t-1} + \mu + \beta t + \varepsilon_t$$

- DFGLS (inny sposób usuwania trendów, pokazano, że ma wyższą moc niż ADF)
- Test Phillips-Perrona (nieparametryczna poprawka dla autokorelacji ε_t)
- Test KPSS (hipoteza zerowa - stacjonarność)
- Testy panelowe pierwiastka jednostkowego

Test z załamaniem (czas znany)

- Perron "The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis" (1989)
- Hipoteza zerowa
  - załamanie w stałej ("crash model")

$$y_t = \mu + y_{t-1} + dD(T_B)_t + \varepsilon_t$$

  - załamanie wzrostu ("changing growth model")

$$y_t = \mu + y_{t-1} + (\mu_2 - \mu_1) DU_t + \varepsilon_t$$

  - załamanie stałej i wzrostu

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \delta D(T_B)_t + (\mu_2 - \mu_1) DU_t + \varepsilon_t$$

gdzie $D(T_B)_t = 1$ jeśli $t = T_B + 1$ i 0 w innych przypadkach, $DU_t = 1$ jeśli $t > T_B$ i 0 w innych przypadkach

Test z załamaniem (czas znany) c.d.

- Hipoteza alternatywna
  - załamanie w stałej

$$y_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)\, DU_t + \varepsilon_t$$

  - załamanie wzrostu

$$y_t = \mu_1 + \beta t + (\beta_2 - \beta_1)\, DT_t^* + \varepsilon_t$$

  - załamanie w stałej i wzrostu

$$y_t = \mu_1 + \beta t + (\beta_2 - \beta_1)\, DU_t + (\beta_2 - \beta_1)\, DT_t + \varepsilon_t$$

gdzie $DT_t^* = t - T_B$, $DT_t = t$ jeśli $t > T_B$ i 0 w innych przypadkach

Test załamaniem (czas znany) c.d.

- Regresje ADF
  - załamanie w stałej

$$\triangle y_t = \alpha y_{t-1} + \mu + \theta DU_t + \beta t + \delta D(T_B)_t + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \triangle y_{t-i} + \varepsilon_t$$

  - załamanie w trendzie

$$\triangle y_t = \alpha y_{t-1} + \mu + \beta t + \tau DT_t^* + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \triangle y_{t-i} + \varepsilon_t$$

  - załamanie w trendzie i stałej

$$\triangle y_t = \alpha y_{t-1} + \mu + \theta DU_t + \beta t + \delta D(T_B)_t + \tau DT_t^* + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \triangle y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Test załamaniem (czas znany) c.d.

- Test pierwiastka jednostkowego bazuje na statystyce $\widehat{t_\alpha}(\lambda)$
- Statystytka liczona jest jako standardowa statystyce t dla hipotezy $\alpha = 0$.
- Rozkład asymptotyczny tej statystki zależy od H_0(rodzaju załamania) i założonego momentu załamania $\lambda = \frac{T_B}{T}$ (specjalne tablice wartości krytycznych)
- λ intepretujemy jako proporcję obserwacji sprzed załamania
- W teście Perrona przyjmujemy, że czas załamania a więc i λ są z góry znane (egzogeniczne)
- Wniosek w artykule Perrona (1989): z 14 szeregów analizowanych przez Nelsona i Plossera (1982) dla 11 można odrzucić H_0 o pierwiastku jednostkowym jeśli uwzględnimy załamanie związane z kryzysem naftowym

Testy z załamaniem (czas nieznany)

- Zivot, Andrews (1992)
  - Hipotezy alternatywne identyczne jak w przypadku Perrona (1989)
  - Hipoteza zerowa zawsze taka sama

$$\triangle y_t = \mu + \varepsilon_t$$

  - Regresje ADF takie same jak u Perrona (1989) z wyjątkiem tego, że pomijamy czynnik $D(T_B)_t$
  - Podstawowa różnica: czas załamania jest nieznany (endogeniczny)

Testy z załamaniem (czas nieznany)

- Statystyka testowa liczona jest jako minimum (infinum) statystyk $t_\alpha(\lambda)$ dla wszytkich możliwych λ

$$t_\alpha\left(\widehat{\lambda}_{\text{inf}}\right) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \widehat{t}_\alpha(\lambda)$$

  gdzie $\widehat{\lambda}_{\text{inf}}$ jest oszacowanym proporcją obserwacji sprzed załamania
- Rozkład statystyki zależy od hipotezy od rozważanego typu załamania oraz od oszacowanej wielkości $\widehat{\lambda}_{\text{inf}}$
- Wniosek Zivota i Adrews'a (1992): z 11 szeregów Nelsona i Plossera (1982), które w przypadku testu zastosowania testu Perrona zostały uznane z stacjonarne, 8 jest niestacjonarna jeśli przyjmiemy, że moment załamania jest nieznany

Testy z dwoma załamaniami

- Lee and Strazicich (2003b)
- Zakładamy, że mamy do czynienia z dwoma załamniami a nie jednym
- Czas załamań nieznany
- Hipotezy H_0 i H_1 analogiczne jak w przypadku Perrona (1989)
- Statystykę testową (LM) uzyskujemy z regresji

$$\triangle y_t = \delta' \triangle \mathbf{Z}_t + \alpha \widetilde{S}_{t-1} + u_t$$

gdzie $\mathbf{Z}_t = [1, t, D(T_{1B})_t, D(T_{2B})_t, DT^*_{1t}, DT^*_{2t}]$ a $\widetilde{S}_{t-1}$ jest wektorem reszt z regresji y_t na stałej i $\mathbf{Z}_t$.

Testy z dwoma załamaniami

- Dwie wersje statystyki testowej $\widehat{\rho}_\alpha = T\hat{\alpha}$ i statystka $\widehat{t}_\alpha$ dla hipotezy $\alpha = 0$.
- Dla nieznanego momentu załamania obie liczymy jako minimum (infinum) dla zbioru możliwych mementów załamań

$$\rho_\alpha\left(\widehat{\lambda}_{\mathrm{inf}}\right) = \inf_{\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda} \widehat{\rho}_\alpha(\lambda)$$

$$t_\alpha\left(\widehat{\lambda}_{\mathrm{inf}}\right) = \inf_{\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda} \widehat{t}_\alpha(\lambda)$$

- Specjalne tablice wartości krytycznych

Testy z dwoma załamaniami

- Narayan and Popp (2010)
  - dwa załamania o nieznanym czasie
  - zastosowanie testu ADF ale w przeciwieństwie do Zivota i Andrewsa (1992) zarówno w przypadku hipotezy zerowej jak i alternatywnej obecne załamanie
- Narayan and Liu (2013)
  - bardziej rozbudowana wersja, w której uwzględnia się możliwość wystąpienia w części losowej procesu GARCH(1,1)

Test Shillera

- Test Shillera (1981)
- Racjonalna cena

$$p_t = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s E_t \left(d_{t+s} \right)$$

- Racjonalna cena *ex post*

$$p_t^* = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s d_{t+s}$$

- W przypadku racjonalnych oczekiwań

$$d_{t+s} = E_t \left(d_{t+s} \right) + \varepsilon_{t+s}$$

i ε_i jest nieskorelowana z żadną informacją dostępną w czasie t

Test Shillera

- Wynika z tego, że

$$p_t^* = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s \left(E_t \left(d_{t+s} \right) + \varepsilon_{t+s} \right) = p_t + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s \varepsilon_{t+s}$$

- Wariancja p_t^* jest równa

$$Var \left(p_t^* \right) = Var \left(p_t \right) + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{2s} Var \left(\varepsilon_{t+s} \right) > Var \left(p_t \right)$$

- Testujemy:
  - $H_0 : Var \left(p_t^* \right) > Var \left(p_t \right)$
  - $H_1 : Var \left(p_t^* \right) \leq Var \left(p_t \right)$ (bąbel?)

Test Shillera

- Implementacja testu sprawia trudności, ponieważ p_t^* jest nieznane.
- W związku z tym szacuje się je na podstawie danych *ex post*

$$p_t^* = \sum_{s=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s d_{t+s} + \left(\frac{1}{1+r} \right)^{T-t} E_t \left(p_T \right)$$

  i przyjmuje się, że $E_t \left(p_T \right) = p_T$ bądź, że $E_t \left(p_T \right) = \overline{p}$.
- Wynik testu uzyskany przez Shillera:
  - wariancja $Var \left(p_t \right)$ wieksza o rząd wielkości od $Var \left(p_t^* \right)$
- Wniosek Shillera: standardowy model wyceny aktywów nie może być prawdziwy

Test Shillera

- Krytyka:
  - warunek końcowy $E_t(p_T) = \overline{p}$ obciąża test w kierunku odrzucenia H_0
  - przy warunku $E_t(p_T) = p_T$ nie ma mocy w stosunku do H_1 o istnieniu bąbla
  - jeśli dywidendy i ceny są niestacjonarne to H_0 jest odrzucana mimo braku bąbla

Test Westa

- West "A specification test for speculative bubbles" (1987)
- Zgodnie z hipotezą o racjonalnych oczekiwaniach i równaniem Eulera dla problemu maksymalizacji międzyokresowej

$$p_t = \frac{1}{1+r} E_t \left(p_{t+1} + d_{t+1} \right)$$

- Wzór ten można zapisać:

$$p_t = \delta \left(p_{t+1} + d_{t+1} \right) + u_t \tag{1}$$

gdzie $\delta = \frac{1}{1+r}$

$$u_t = \delta \left(p_{t+1} + d_{t+1} - E_t \left(p_{t+1} + d_{t+1} \right) \right)$$

i $E_t \left(u_t \right) = 0$.

Test Westa

- Estymator MNK dla równania (1) nie jest zgodny
- Zmienna objaśniająca skorelowana z błędem losowym:

$$E_t\left[\left(p_{t+1}+d_{t+1}\right)u_t\right]=\delta\, Var_t\left(p_{t+1}+d_{t+1}\right)$$

- Z założenia o racjonalnych oczekiwaniach błąd predykcji nie zależy od zmiennych znanych w czasie t

$$E_t\left(u_t \mid p_t, d_t, p_{t-1}, d_{t-1}, \ldots\right)=0$$

- Zgodne oszacowanie β_1 można uzyskać MZI przyjmując za instrumenty zmienne znane w czasie t (np. d_t,p_{t-1} itd)

Test Westa

- Załóżmy, że dywidendy dane procesem AR(1)

$$d_t = \phi d_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

- Za pomocą MNK możemy uzyskać zgodne oszacowanie ϕ
- Dywidenda d_{t+s} jest równa:

$$d_{t+s} = \phi^s d_t + \sum_{i=1}^{s} \phi^s \varepsilon_{t+s}$$

- Oczekiwana fundamentalna część ceny:

$$v_t = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s E_t \left(d_{t+s} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\phi}{1+r} \right)^s d_t = \overline{\beta} d_t$$

gdzie

$$\overline{\beta} = \frac{\frac{\phi}{1+r}}{1 - \frac{\phi}{1+r}} = \frac{\phi \delta}{1 - \phi \delta} \tag{3}$$

Test Westa

- Wartość $\overline{\beta}$ można uzyskać
  - na podstawie oszacowań ϕ i δ
  - bezpośrednio, szacując równanie

$$p_t = v_t + b_t = \overline{\beta} d_t + b_t \tag{4}$$

- W przypadku występowania korelacji między b_t (bąblem) a d_t uzyskane oszacowanie $\widehat{\overline{\beta}}$ nie będzie spełniać (3).
- Test przeprowadzamy:
  - szacując ϕ z (2) i $\widehat{\overline{\beta}}$ z (4) MNK a δ MZI z (1)
  - znajdując $\widetilde{\overline{\beta}} = \frac{\widetilde{\phi}\widetilde{\delta}}{1-\widetilde{\phi}\widetilde{\delta}}$
  - przeprowadzając test $H_0 : \widetilde{\overline{\beta}} = \widehat{\overline{\beta}}$ (test Hausmana)

Test Westa

- Wnioski Westa: hipoteza o braku bąbli spekulacyjnych silnie odrzucana
  - Test można uogólnić na przypadek, gdy dywidendy zachowują się zgodnie z procesem ARIMA(p,d,q).
- Krytyka: odrzucenie H_0 może być spowodowane
  - błędnym wyspecyfikowaniem modelu dla dywidend
  - zmienną w czasie stopą dyskonta
  - występowaniem rzadkich zdarzeń, które brane są pod uwagę przez inwestorów ale nie są obserwowane w próbie

Test Diby i Grossmana

- Test Shillera i Westa nie wykorzystują żadnych założeń co do formy bąbla
- Diba, Grossman (1988) zaproponowali test wykorzystujący własności bąbli oparty na teście integracji
- Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami

$$E_t\left[b_{t+1}\right] = (1+r)\, b_t$$

a więc

$$b_{t+1} = (1+r)\, b_t + z_t$$

gdzie $E_t\left(z_t\right) = 0$

- Wartość $b_0 > 0$ a więc bąbel musi być obecny od początku notowań i nie może być ujemny

Test Diby i Grossmana

- Proces stochastyczny dla b_t jest niestacjonarny (eksplozywny)
- Model dla cen aktywów wygląda następująco:

$$p_t = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s E_t \left(d_{t+s} + o_t \right) + b_t$$

gdzie o_t są nieobserwowalnymi czynnikami fundamentalnymi.

- Załóżmy ceny i dywidendy są $I(1)$ a o_t jest stacjonarne

Test Diby i Grossmana

- Równanie obserwowalne

$$p_t = \sum_{s=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s d_{t+s} + \left(\frac{1}{1+r} \right)^{T-t} p_T + u_t$$

gdzie $u_t = o_t + \varepsilon_t + b_t$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= -\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^s [d_{t+s} + o_t - E_t(d_{t+s} + o_t)] \\ &\quad - \left(\frac{1}{1+r} \right)^{T-t} [p_T - E_t(p_T)] \end{aligned}$$

i ε_t jest stacjonarne

- Powyższe równanie implikuje, że
  - dla $H_0 : b_t = 0$ (brak bąbla) p_t i d_t, p_T są skointegrowane
  - dla $H_1 : b_t \neq 0$ (bąbel) p_t i d_t, p_T nie są skointegrowane

Prawostronny test Diby i Grossmana

- Proces stochastyczny dla b_t jest wybuchowy
- W konsekwencji w przypadku występowania bąbla także proces dla p_t będzie eksplozywny
- Dla procesu

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- formułujemy:
    - $H_0 : \alpha = 1$ (pierwiastek jednostkowy)
    - $H_1 : \alpha > 1$ (proces ekspolozywny - bąbel)

Prawostronny test Diby i Grossmana

- W przypadku klasycznego testu DF oznacza to

$$\triangle y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

  - $H_0 : \rho = 0$ (pierwiastek jednostkowy)
  - $H_1 : \rho > 0$ (proces wybuchowy - bąbel)
- Używamy więc prawostronnego a nie lewostronnego (klasyczny ADF) obszaru krytycznego dla statystyki t
- Specjalne tablice
- Wniosek z badania empirycznego Diby i Grossmana: p_t i d_t są rzeczywiście $I(1)$ oraz są skointegrowane, brak bąbla

Testy Diby i Grossmana

- Krytyka:
  - o_t może także być niestacjonarne
  - Evans (1991),
    - bańki cykliczne: pękają z p-stwem $1-\pi$ ale nie całkowicie (b_t spada ale nie do zera) a później odradzają się
    - dla takich baniek moc testu Diby i Grossmana bliska zeru nawet dla niskich $1-\pi$
- Odpowiedź na krytykę:
  - prawostronne testy oparte na przesuwanych i sekwencyjnych oknach
  - estymacja modelu MSM

- Froot, Obsfeld (1991)