Modelowanie rynków finansowych

Jerzy Mycielski

WNE UW

5 października 2017

Podstawowe elementy teorii

1. racjonalne oczekiwania
   Oczekiwania formułowane jako warunkowe wartości oczekiwane przy danym zbiorze informacyjnym $\mathcal{I}_{t-1}$

$$\text{Oczekiwane } W_t = \mathrm{E}\left(W_t \middle| \mathcal{I}_{t-1}\right)$$

2. warunek braku arbitrażu

$$\mathrm{E}\left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \middle| \mathcal{I}_{t-1}\right) \approx \mathrm{E}\left(\Delta p_t \middle| \mathcal{I}_{t-1}\right) = r$$

   gdzie $p_t = \ln\left(P_t\right)$ a r jest oczekiwaną wartością przychodu dla aktywów o analogicznym poziomie ryzyka
3. teoria oczekiwanej użyteczności Von Neumanna - Morgensterna

Von Neumann - Morgenstern

Maksymalizowana oczekiwana użyteczność uzyskiwana z portfela o losowej wartości P_t a nie oczekiwana wartość tego portfela.

$$P_t \succ P_t^*$$

jeśli

$$\mathrm{E}\left[U\left(P_t\right)\right] > \mathrm{E}\left[U\left(P_t^*\right)\right]$$

a nie

$$U\left[\mathrm{E}\left(P_t\right)\right] > U\left[\mathrm{E}\left(P_t^*\right)\right]$$

Von Neumann - Morgenstern c.d.

- Rozwinięcie Taylora funkcji użyteczności:

$$\begin{aligned}U(W_t) &= U[\mathrm{E}(W_t)] + U'[\mathrm{E}(W_t)][W_t - \mathrm{E}(W_t)] \\ &+ \frac{1}{2}U''[E(W_t)][W_t - \mathrm{E}(W_t)]^2 \\ &+ \frac{1}{6}U^{(3)}[\mathrm{E}(W_t)][W_t - \mathrm{E}(W_t)]^3 + R_t\end{aligned}$$

- Wartość oczekiwana użyteczności:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[U(W_t)] &= U[\mathrm{E}(W_t)] + \frac{1}{2}U''[\mathrm{E}(W_t)]\sigma^2 \\ &+ \frac{1}{6}U^{(3)}[\mathrm{E}(W_t)]\mu_3 + \mathrm{E}(R_t)\end{aligned}$$

- Przyjmuje się zazwyczaj, że $\frac{1}{6}U^{(3)}[\mathrm{E}(W_t)]\mu_3 \approx 0$ i $\mathrm{E}(R_t) = 0$
- Z aksomatów teorii konsumenta wynika, że $U''[\mathrm{E}(W_t)] \leq 0$ (awersja do ryzyka)

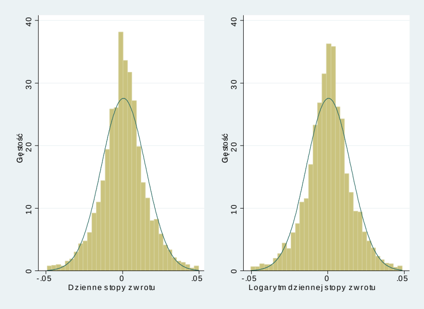
Wniosek: użyteczność inwestycji wzrasta wraz ze stopą zwrotu i maleje wraz z ryzykiem mierzonym σ^2

Podstawowe fakty stylizowane dotyczące rynku kapitałowego

- rynek efektywny (Fama)
  - założenia (1,2) ale także (3)
- pozytywna korelacja między ryzykiem a oczekiwaną dochodowością (3)
- logarytmy stóp zwrotu nie mają rozkładu normalnego - są leptokurtyczne (grube ogony)
- grupowanie wariancji w czasie

WIG (wysokość indeksu z okresu 1.10.1994–19.04.2007)

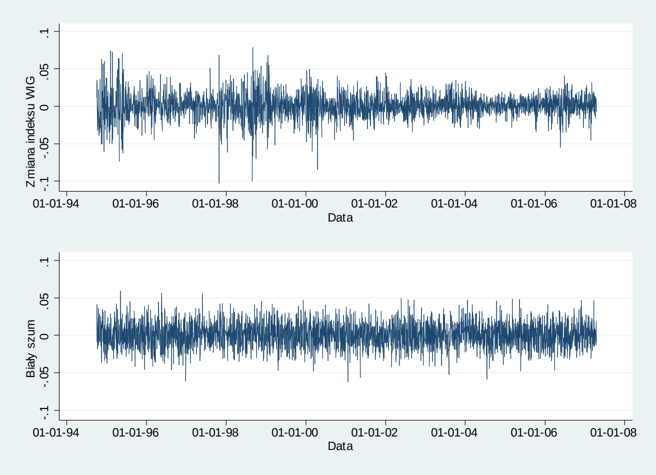
WIG (rozkłady stóp zwrotu 1.10.1994-19.04.2007)



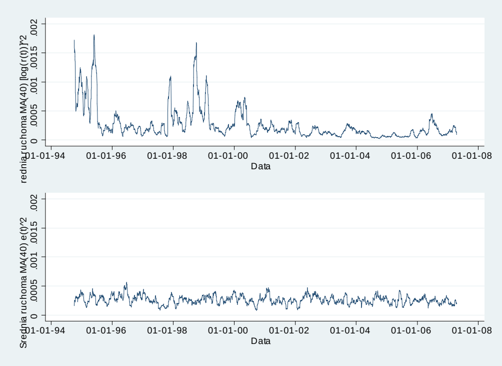
Rysunek: Rozkład zwrotów i logarytmów zwrotów

	$\frac{P_t}{P_{t-1}}$	$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$	Reszty z modelu $AR(1)$
Skośność	-0.030	-0.156	-0.094
Kurtoza	6.186	6.314	6.433
Stat. JB	1328	1449	1544
$\Pr\left(JB > \chi_2^{2*}\right)$	0.000	0.000	0.000

Zwroty z WIG i biały szum (1.10.1994-19.04.2007)



Kwadraty zwrotów z WIG i kwadraty białego szumu (1.10.1994-19.04.2007)



Praktyczne znaczenie faktów stylizowanych

- średnia stopa zwrotu z zarządzanego portfela jest (w dłuższym okresie) równa stopie losowo dobranego portfela o identycznej wariancji
- wyższe stopy zwrotu można osiągnąć wyłącznie na drodze podejmowania wyższego ryzyka
- p-stwo wysokich strat jest dużo wyższe niż to sugerowane przez rozkład normalny - należy to uwzględnić przy liczeniu wartości opcji i VAR (Value at Risk)
- ryzyko inwestowania zmienia się w czasie

Weryfikacja faktów stylizowanych

Testy pierwiastka jednostkowego

- jeśli spełniona jest hipoteza o efektyności rynkowej, to

$$\mathrm{E}\left(\Delta p_t \middle| \mathcal{I}_{t-1}\right) = r$$

  a więc

$$p_t = p_{t-1} + r + \varepsilon_t$$

  i $\mathrm{E}\left(\varepsilon_t \middle| \mathcal{I}_{t-1}\right) = 0$. Weryfikujemy hipotezę o tym, że współczynnik przy p_{t-1} równa się jeden

Weryfikacja braku przewidywalności oczekiwanych stóp zwrotu:

- brak przyczynowości w sensie Grangera

$$\mathrm{E}\left(\Delta p_t \middle| \mathcal{I}_{t-1}\right) = \mu$$

  gdzie $\mathcal{I}_{t-1}$ jest zbiorem informacji z poprzedniego okresu
- $\mathcal{I}_{t-1}$ jest zawiera między innymi ceny z przeszłości, zatem

$$\mathrm{E}\left(\Delta p_t \middle| \Delta p_{t-1}, \Delta p_{t-2}, \ldots\right) = \mu$$