Estymacja panelowa modeli dynamicznych

Jerzy Mycielski

UW

2016

Estymator pierwszych różnic

- Założenia konieczne dla zgodności estymatora

$$\mathrm{E}\left(u_{it} \middle| \mathbf{x}_i, c_i\right) = 0 \text{ dla } t = 1, \ldots, T$$

- Używamy różnicowania do wyeliminowania efektu indywidualnego c_i
- Model

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$

- Stosujemy różnicowanie i otrzymujemy

$$\Delta y_{it} = \Delta \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}$$

- Pierwsza obserwacja ($T = 1$, $i = 1, \ldots, N$) jest pomijana
- Zmienne stałe w czasie wypadają z regresji
- Estymator pierwszych różnic (FD) uzyskujemy przeprowadzając regresję na próbie wymieszanej ($POLS$) Δy_{it} na $\Delta \mathbf{x}_{it}$
- Estymator ten jest zgodny, ponieważ przy przyjętych założeniach $\mathrm{E}\left(\Delta \mathbf{x}_{it}' \Delta u_{it}\right) = 0$
- Przy założeniu, że $\mathrm{E}\left(\Delta \mathbf{u}_i \Delta \mathbf{u}_i' \middle| \mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i\right) = \sigma_u^2 \mathbf{I}_T$ estymator pierwszych różnic jest także najbardziej efektywny

Estymatory panelowe przy sekwencyjnych ograniczeniach narzuconych na momenty

- Do uzyskania zgodności estymatorów *RE*, *FE*, *FD* zwykle zakładamy ścisłą egzogeniczność:

$$\mathrm{E}\left(u_{it} \,\middle|\, \mathbf{x}_{i1}, \ldots, \mathbf{x}_{iT} \right)$$

- Założenie to oznacza, że wartość oczekiwana błędu czystolosowego (u_{it}) nie zależy zeszłych, obecnych i *przyszłych* wartości zmiennych objaśniających $\mathbf{x}_i$
- Założymy obecnie, że w modelu

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \quad \text{dla } t = 1, 2, \ldots, T$$

i założymy, że wartość oczekiwana u_{it} może zależeć od *przyszłych* wartości $\mathbf{x}_{it}$

- Równocześnie założymy, że prawdziwe są następujące *sekwencyjne ograniczenia narzucone na momenty (sequential moment restrictions)*

$$\mathrm{E}\left(u_{it} \,\middle|\, \mathbf{x}_{it}, \mathbf{x}_{it-1}, \ldots, \mathbf{x}_{i1}, c_i \right) = 0$$

- Ograniczenia te implikują, że wartość oczekiwana u_{it} nie może zależeć od obecnych i przeszłych wartości $\mathbf{x}_i$
- Jeśli założenie to jest prawdziwe mówimy o sekwencyjnej egzogeniczności $\mathbf{x}_{it}$ warunkowej względem efektu indywidualnego
- Liniowy model efektów nieobserwowalnych można teraz sformułować następująco:

$$\mathrm{E}\left(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, \mathbf{x}_{it-1}, \ldots, \mathbf{x}_{i1}, c_i\right) = \mathrm{E}\left(y_{it} \mid \mathbf{x}_{it}, c_i\right) = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i$$

Przykład: *(Wooldrodge) Dynamiczny model efektów nieobserwowalnych*

$$y_{it} = \mathbf{z}_{it}\gamma + \rho_1 y_{i,t-1} + c_i + u_{it}$$

a więc w tym przypadku $x_{it} \equiv \left(\mathbf{z}_{it}, y_{i,t-1}\right)$. *Wynika z tego, że* $\left(\mathbf{x}_{it}, \mathbf{x}_{it-1}, \ldots, \mathbf{x}_{i1}\right) = \left(\mathbf{z}_{it}, y_{i,t-1}, \ldots, \mathbf{z}_{i1}, y_{i,0}\right)$ *i sekwencyjne ograniczenia narzucone na momenty implikują, że*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(y_{it} \mid \mathbf{z}_{it}, y_{i,t-1}, \ldots, \mathbf{z}_{i1}, y_{i,0}, c_i\right) &= \mathrm{E}\left(y_{it} \mid \mathbf{z}_{it}, y_{i,t-1}, c_i\right) \\ &= \mathbf{z}_{it}\gamma + \rho_1 y_{i,t-1} + c_i \end{aligned}$$

Sekwencyjna egzogeniczność i zgodność estymatorów panelowych

- W przypadku, gdy sekwencyjne ograniczenia narzucone na momenty są prawdziwe ale nie jest prawdziwe założenie o ścisłej egzogeniczności estymatory RE, FE, FD nie są zgodne. Na przykład estymator efektów stałych nie jest zgodny ponieważ:

$$\operatorname{plim}\left(\widehat{\beta}_{FE}\right) = \beta + \left[T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{it}\mathbf{x}_{it}'\right)\right]^{-1}\left[T^{-1}\sum_{i=1}^{T}\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{it}'u_{it}\right)\right]$$

  ale $\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{it}'u_{it}\right) = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{x}_{it}-\overline{\mathbf{x}}_{it}\right)u_{it}\right] = -\,\mathrm{E}\left(\overline{\mathbf{x}}_{it}u_{it}\right) = T^{-1}\sum_{s=1}^{T}\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{is}u_{it}\right) = T^{-1}\sum_{s=t+1}^{T}\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{is}u_{it}\right) \neq 0$, ponieważ w przypadku ograniczeń sekwencyjnych zakładamy, że może istnieć korelacja między u_{it} a $\mathbf{x}_{is}$ dla $s > t$.

- Wielkość asymptotycznego obciążenia maleje z szybkością T^{-1} ale dla paneli T jest często małe

Sekwencyjna egzogeniczność i zgodność estymatorów panelowych c.d.

- Jeśli $\mathbf{x}_{it}$ jest stacjonarne to estymator *FE* jest lepszy niż estymator *FD* ponieważ estymator *FE* ma błąd $O\left(T^{-1}\right)$ a dla estymatora *FD* błąd nie zależy od T
- Możliwe jest jednak znalezienie estymatorów zgodnych przy ograniczeniach sekwencyjnych
- Po zastosowaniu przekształcenia pierwszych różnic otrzymujemy

$$\Delta y_{it} = \Delta \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}, \qquad \text{dla } t = 2, \ldots, T$$

- Założenie o sekwencyjnej warunkowej egzogeniczności $\mathbf{x}_i$ implikuje, że

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{is}' u_{it}\right) = 0, \quad \text{dla } s = 1, 2, \ldots, t$$

- Zauważmy jednak, że

$$\mathrm{E}\left(\Delta \mathbf{x}_{it}' \Delta u_{it}\right) \neq 0$$

ponieważ $\mathbf{x}_{it-1}$ może być skorelowany z u_{it}. Estymator *POLS* dla modelu dla pierwszych różnic nie jest zgodny

Estymator zgodny dla modelu z sekwencyjnie egzogenicznymi zmiennymi

- Zauważmy jednak, że

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{is}'\Delta u_{it}\right) = 0, \qquad \text{for } s = 1, 2, \ldots, t-1$$

  oraz

$$\mathrm{E}\left(\Delta\mathbf{x}_{is}'\Delta u_{it}\right) = 0, \qquad \text{for } s = 1, 2, \ldots, t-1$$

- W rezultacie wektory zmiennych $\mathbf{x}_{it}^{o} = \mathbf{x}_{it-1}, \ldots, \mathbf{x}_{i,0}$ lub $\mathbf{x}_{it}^{o} = \Delta\mathbf{x}_{it-1}, \ldots, \Delta\mathbf{x}_{i,0}$ (oraz każda ich liniowa kombinacja czy funkcja) mogą być użyte jako zmienne instrumentalne w równaniu na pierwszych różnicach
- W rezultacie równanie na pierwszych różnicach można zgodnie oszacować za pomocą $2MNK$ zastosowanego do modelu na pierwszych różnicach i próby wymieszanej

Estymator efektywny dla modelu z sekwencyjnie egzogenicznymi zmiennymi

- Zazwyczaj założenie, że spełniony jest warunek rzędu stosowalności $2MNK$ a więc $\mathrm{E}\left(\Delta\mathbf{x}_{it}\Delta\mathbf{x}'_{it-1}\right) = K$ ma sens. Użycie takich instrumentów jest jednak możliwe tylko, gdy $T \geq 3$
- Dla $T = 2$ możemy użyć $\mathbf{x}_{it-1}$ ale często korelacja między $\Delta\mathbf{x}_{it}$ i $\mathbf{x}_{it-1}$ jest mała
- Estymatorem efektywnym w tym kontekście jest estymator UMM, który wykorzystuje wszystkie sekwencyjne ograniczenia narzucone na momenty. Jednak własności takiego estymatora w małej próbie mogą być nieporządane z racji na dużą liczbę przeidentyfikowujących ograniczeń.
- Zauważmy, że dla u_{it} nieskorelowanego w modelu oryginalnym wystąpi korelacja pierwszego rzędu dla błędu losowego Δu_{it} w modelu na różnicach. Ten problem można rozwiązać stosując odporną macierz wariancji kowariancji (estymator warstwowy).

Estymator panelowy w przypadku mieszanym

- Może się zdarzyć, że

$$y_{it} = \mathbf{z}_{it}\gamma + \mathbf{w}_{it}\delta + c_i + u_{it}, \quad \text{dla } t = 1, 2, \ldots, T$$

  przy czym $\mathbf{z}_{it}$ jest ściśle egzogeniczny ale $\mathbf{w}_{it}$ jest sekwencyjnie egzogeniczny.
- W takim przypadku estymujemy za pomocą $2MNK$ równanie

$$\Delta y_{it} = \Delta \mathbf{z}_{it}\gamma + \text{´}\mathbf{w}_{it}\delta + \Delta u_{it}, \quad \text{for } t = 2, \ldots, T$$

  wykorzystując jako instrumenty $\mathbf{z}_{it}, \mathbf{w}_{it-1}, \ldots, \mathbf{w}_{i,0}$ albo jakąkolwiek ich liniową kombinację.
- Typowym zastosowaniem tej metody jest estymacja modelu

$$y_{it} = \mathbf{z}_{it}\gamma + \rho_1 y_{it-1} + c_i + u_{it}$$

Estymator panelowy w przypadku równoczesnej endogeniczności

- Może się zdarzyć, że występuje równoczesna korelacja między zmiennymi objaśniającymi a błędem czystolosowym.
- W takim przypadku $\mathrm{E}\left(\mathbf{z}'_{is} u_{it}\right) = 0$ dla wszystkich s, t ale dopuszczamy, że $\mathbf{w}_{it}$ wykazuje równoczesną korelację z u_{it}
- W takim przypadku estymujemy model na pierwszych różnicach przy użyciu zmiennych instrumentalnych pochodzących spoza modelu (ale możemy także użyć $\mathbf{z}'_i$ i $\mathbf{w}_{it-2}, \ldots, \mathbf{w}_{i0}$ jako instrumenty).
- Jeśli w modelu nie występują zmienne opóźnione możemy także użyć przekształcenia efektów stałych a następnie $2MNK$ dla zmiennych przekształconych.

- Najprostszym modelem tego typu jest model losowego trendu

$$y_{it} = c_i + g_i t + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}$$

- Stopa wzrostu w takim modelu (w przypadku modelu logliniowego) jest różna dla poszczególnych jednostek
- Założenie o ścisła egzogeniczności wygląda w tym przypadku następująco:

$$\mathrm{E}\left(u_{it} \middle| \mathbf{x}_{i1}, \ldots, \mathbf{x}_{iT}, c_i, g_i \right) = 0$$

  a model ma następującą postać:

$$\mathrm{E}\left(y_{it} \middle| \mathbf{x}_{i1}, \ldots, \mathbf{x}_{iT}, c_i, g_i \right) = \mathrm{E}\left(y_{it} \middle| \mathbf{x}_{it}, c_i, g_i \right) = c_i + g_i t + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta}$$

- Jednym z podejść do estymacji jest zastosowanie przekształcenia pierwszych różnic:

$$\Delta y_{it} = g_i + \Delta \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}, \text{ dla } t = 2, \ldots, T$$

  i oszacowania uzyskanego modelu za pomocą estymatora *FE* lub *FD*
- Do zastosowania różnicowania musimy mieć $T \geq 2$, dla późniejszego zastosowania *FE* lub *FD* potrzebujemy $T \geq 3$

Modele z indywidualnymi współczynnikami

przypadek ogólny

- Ogólna postać modelu z indywidualnymi współczynnikami

$$y_{it} = \mathbf{z}_{it}\mathbf{a}_i + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}$$

- Założenie o ścisłej egzogeniczności

$$\mathrm{E}\left(u_{it} \middle| \mathbf{z}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{a}_i\right) = 0 \text{ dla } t = 1, \ldots, T$$

- Model ten można zapisać w formie macierzowej

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{Z}_i\mathbf{a}_i + \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i$$

- Zdefiniujmy macierz $\mathbf{M}_i = \mathbf{I}_T - \mathbf{Z}_i\left(\mathbf{Z}_i'\mathbf{Z}_i\right)^{-1}\mathbf{Z}_i'$ i pomnóżmy obie strony równania z lewej strony przez tą macierz

$$\mathbf{M}_i\mathbf{y}_i = \underbrace{\mathbf{M}_i\mathbf{Z}_i}_{0}\mathbf{a}_i + \mathbf{M}_i\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{M}_i\mathbf{u}_i$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_i = \ddot{\mathbf{X}}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{M}_i\mathbf{u}_i$$

gdzie $\ddot{\mathbf{y}}_i, \ddot{\mathbf{X}}_i$ są resztami z regresji $\mathbf{y}_i, \mathbf{X}_i$ na $\mathbf{Z}_i$

Modele z indywidualnymi współczynnikami

przypadek ogólny c.d.

- Jeśli prawdziwe jest założenie o ścisłej egzogeniczności, to $\mathrm{E}\left(\mathbf{X}_i'\mathbf{u}_i\right) = 0$ i *POLS* zastosowany do przekształconego równania da estymator zgodny
- Warunek rzędu $\mathrm{E}\left(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right) = K$ może zawieść jeśli są elementy $\mathbf{x}_{it}$, które nie zmieniają się w czasie
- Jest możliwe uzyskanie zgodnych estymatorów wartości oczekiwanej losowych współczynników $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{E}\left(\mathbf{a}_i\right)$, ponieważ $\boldsymbol{\alpha}$ jest równe

$$\alpha = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{Z}_i'\mathbf{Z}_i\right)^{-1}\mathbf{Z}_i'\left(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\beta\right)\right]$$

a zatem może być oszacowana następująco:

$$\widehat{\alpha} = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\mathbf{Z}_i'\mathbf{Z}_i\right)^{-1}\mathbf{Z}_i'\left(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\widehat{\beta}_{FE}\right)\right]$$

- Nieobciążone ale niezgodne estymatory współczynników można uzyskać ze wzoru:

$$\widehat{\mathbf{a}}_i = \left(\mathbf{Z}_i'\mathbf{Z}_i\right)^{-1}\mathbf{Z}_i'\left(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\widehat{\beta}_{FE}\right)$$

Estymator Hausmana-Taylora

- Częsty problem przy estymacji modelu za pomocą estymatora efektów stałych niemożliwe oszacowanie współczynników, przy zmiennych stałych w czasie
- Załóżmy, że model ma następującą postać:

$$y_{it} = \mathbf{z}_i \gamma + \mathbf{x}_{it} \beta + c_i + u_{it}$$

- Założenie o ścisłej egzogeniczności:

$$\mathrm{E}\left(u_{it} \middle| \mathbf{x}_{i1}, \ldots, \mathbf{x}_{iT}, c_i \right) = 0$$

- Przekształcenie *FE* i *FD* eliminują $\mathbf{z}_i$ i w konsekwencji γ

Estymator Hausmana-Taylora

najprostszy przypadek

- Jeśli jednak $\mathrm{E}\left(\mathbf{z}_i'\mathbf{c}_i\right) = 0$, to można oszacować γ używając faktu, że

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i\gamma + c_i + \overline{u}_{i.} &= \overline{y}_i - \overline{\mathbf{x}}_{i.}\boldsymbol{\beta} \\ \mathrm{E}\left(\mathbf{z}_i'\mathbf{z}_i\right)\gamma &= \mathrm{E}\left[\mathbf{z}_i'\left(\overline{y}_i - \overline{\mathbf{x}}_i\boldsymbol{\beta}\right)\right] \end{aligned}$$

  a więc estymatorem γ jest

$$\gamma = \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'\right]^{-1}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{z}_i'\left(\overline{y}_i - \overline{\mathbf{x}}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}\right)\right]$$

Estymator Hausmana-Taylora
przypadek ogólny

- Przypadek ogólny: $\mathbf{z}_i = (\mathbf{z}_{i,1}, \mathbf{z}_{i,2})$, $\mathbf{x}_{it} = (\mathbf{x}_{it,1}, \mathbf{x}_{it,2})$ i zakładamy, że $\mathbf{z}_{i1}$, $\mathbf{x}_{it,1}$ są nieskorelowane c_i.
- Konieczny warunek identyfikacji $TK_1 \geq J_2$, gdzie K_1 jest liczbą zmiennych w $\mathbf{x}_{i1t}$, J_2 jest liczbą zmiennych w $\mathbf{z}_{i2}$
- Estymator Hausmana-Taylora wyliczany jest następująco:
  1. Przeprowadzamy regresję $2MNK$ na próbie wymieszanej używając jako instrumentów $(\mathbf{z}_{i,1}, \mathbf{x}_{it,1}, \mathbf{x}^o_{it,1})$
     gdzie $\mathbf{x}^o_{it1} = \left(\mathbf{x}^o_{it,1}, \mathbf{x}^o_{it-1,1}, \ldots, \mathbf{x}^o_{i1,1}\right)$
  2. Liczymy $\widehat{\sigma}^2_c, \widehat{\sigma}^2_u$ i $\widehat{\lambda}$
  3. Przeprowadzamy pseudo-odśrednianie zmiennej niezależnej, zmiennych niezależnych oraz instrumentów
  4. Przeprowadzamy regresję $2MNK$ na zmiennych pseudo-odśrednionych

Testowanie stacjonarności w przypadku paneli

- Model statystyczny

$$y_{it} = \rho_i y_{it-1} + \mathbf{z}_{it}\gamma_i + u_{it}$$

odejmując obu stron y_{it-1} otrzymujemy

$$\Delta y_{it} = \phi_i y_{it-1} + \mathbf{z}_{it}\gamma_i + u_{it}$$

- y_{it} jest niestacjonarne jeśli $\rho_i = 1$ (lub równoważnie $\phi_i = 0$) dla $i = 1, \ldots, N$
- $\mathbf{z}_{it}$ zawiera elementy deterministyczne n.p. stała i trend $\mathbf{z}_{it} = [1, t]$
- Opracowano szereg testów stacjonarności, które różnią się założeniami dotyczącymi stałości ρ_i (lub równoważnie ϕ_i), γ_i oraz własnościami asymptotyczymi

Testowanie stacjonarności w przypadku paneli c.d.

- Własności asymptotyczne wiążą się głownie z pytaniem, czy test jest zgodny dla $N \longrightarrow \infty$ i T stałego, dla $T \longrightarrow \infty$ i N małego, czy też dla jakiejś kombinacji tych założeń
- Przy wyborze testów znaczenie ma także założony model trendów deterministycznych
- Testy (STATA)
    - Levin–Lin–Chu test
    - Harris–Tsavalis test
    - Breitung test
    - Im–Pesaran–Shin test
    - Fisher-type tests
    - Hadri LM test

Test	Trend	Asymptotyka	ρ_i dla H_1	Panel
LLC	bez stałej	$\sqrt{N}/T$	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
LLC		$N/T \to 0$	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
LLC	trend	$N/T \to 0$	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
HT	bez stałej	$N \to \infty$, T stałe	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
HT		$N \to \infty$, T stałe	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
HT	trend	$N \to \infty$, T stałe	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
Breitung	bez stałej	$(T, N) \to_{\text{seq}} \infty$	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
Breitung		$(T, N) \to_{\text{seq}} \infty$	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
Breitung	trend	$(T, N) \to_{\text{seq}} \infty$	$\rho_i = \rho$	zbilansowany
IPS	trend	$N \to \infty$, T stałe	$\rho_i \neq \rho_j$	niezbilansowany
IPS	opóźnienia	$(T, N) \to_{\text{seq}} \infty$	$\rho_i \neq \rho_j$	niezbilansowany
IPS	trend z opóźnieniami	$(T, N) \to_{\text{seq}} \infty$	$\rho_i \neq \rho_j$	niezbilansowany
Fisher		$T \to \infty$, N stałe	$\rho_i \neq \rho_j$	niezbilansowany
Hadri LM		$(T, N) \to_{\text{seq}} \infty$	$\times$	zbilansowany
Hadri LM	trend	$(T, N) \to_{\text{seq}} \infty$	$\times$	zbilansowany

- Proces Generujący dane

$$\Delta y_{it} = \delta_i' \mathbf{d}_t + \alpha_i \left(y_{i,t-1} - \boldsymbol{\beta}_i \mathbf{x}_{i,t-1} \right) + \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij} \Delta y_{i,t-j} + \sum_{j=-q_i}^{p_i} \boldsymbol{\alpha}_{ij} \Delta \mathbf{x}_{i,t-j} + \varepsilon$$

gdzie wektor $\mathbf{d}_t$ jest wektorem elementów deterministycznych

- Przekształcając

$$\Delta y_{it} = \delta_i' \mathbf{d}_t + \alpha_i y_{i,t-1} - \boldsymbol{\lambda}_i' \mathbf{x}_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij} \Delta y_{i,t-j} + \sum_{j=-q_i}^{p_i} \boldsymbol{\alpha}_{ij} \Delta \mathbf{x}_{i,t-j} + \varepsilon_{it}$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}_i' = -\alpha_i \boldsymbol{\beta}_i$

- Jeśli $\alpha_i = 0$, to nie ma korekty błędem i tym samaym nie zachodzi kointegracja, jeśli $\alpha_i < 0$, to dla jednostki i kointegracja zachodzi
- W związku z tym hipoteza zerowa o braku kointegracji może zostać sformułowana następująco:

$$H_0 : \alpha_i = 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, N$$

Testowanie kointegracji w przypadku paneli c.d.

- Hipoteza alternatywna może być sformułowana na dwa sposoby:
  - jeśli załaożymy, że dla poszczególnych jednostek panelu α_i mogą być różne
$$H_1 : \alpha_i < 0 \text{ dla pewnego } i \tag{*}$$
  - jeśli założymy, że dla wszystkich jednostek panelu α_i są identyczne
$$H_1 : \alpha_i = \alpha < 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, N \tag{**}$$
- Statystyki otrzymywane dla (*) nazywamy statystykami grupowymi (*group-mean*)
- Statystyki otrzymywane dla (**) nazywamy statystykami panelowymi

Testowanie kointegracji w przypadku paneli c.d.

- W procesie liczenia statystyki szacuje się metodami nieparametrycznymi długookresową macierz wariancji kowariancji
- W obu przypadkach możemy zastosować statystykę opartą na statystyce t (oznaczoną odpowiednio G_τ, P_τ) lub na $T\widehat{\alpha}$ (oznaczone jako G_α, P_α)
- Wybór konkretnej statystyki zależy od analizowanego problemu badawczego
- Westerlund wyprowadził rozkład asymptotyczny tych statystyk dla $(T, N) \rightarrow_{\text{seq}} \infty$