# Heteroskedastyczność i autokorelacja (cz. II)

**Natalia Nehrebecka**
**Stanisław Cichocki**

Wykład 14

# Plan zajęć

1. Konsekwencje heteroskedastyczności i autokorelacji

2. Uogólniona MNK

3. Stosowalna Uogólniona MNK

4. Odporne macierze wariancji i kowariancji b

# Plan zajęć

1. Konsekwencje heteroskedastyczności i autokorelacji

2. Uogólniona MNK

3. Stosowalna Uogólniona MNK

4. Odporne macierze wariancji i kowariancji b

# Heteroskedastyczność i autokorelacja

- Jeżeli założenie o homoskedastyczności lub założenie o braku autokorelacji nie jest spełnione, to mówimy o niesferyczności błędów losowych

- W przypadku występowania heteroskedastyczności lub autokorelacji:

$$Var(\varepsilon) = \Omega = \sigma^2 V$$

# SUMNK

- Gdy elementy macierzy $V$ są nieznane $\longrightarrow$ używamy estymatora UMNK zastępując $V$ oszacowaniem $\hat{V}$

$\longrightarrow$ metoda ta to Stosowalna Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (*Feasible Generalized Least Squares*)

# Stosowalna Uogólniona MNK

- **Istota:** budujemy dodatkowy model dla wariancji i kowariancji tak aby znaleźć funkcję $\Omega(\theta)$

- Zakładamy, że

$$Var(\varepsilon) = \Omega(\theta)$$

  - gdzie wymiar $\boldsymbol{\theta}$ nie zależy od liczby obserwacji.
  - Dla znanego $\boldsymbol{\theta}$ moglibyśmy zastosować UMNK, jednak zwykle $\boldsymbol{\theta}$ jest nieznane.
  - Wiemy, że estymator MNK jest zgodny nawet wtedy, gdy występuje autokorelacja lub heteroskedastyczność.

# Przykład

- Typowy przykład zastosowania SUMNK – usuwanie heteroskedastyczności z modelu

- Heteroskedastyczność ma postać zależności funkcyjnej:

$$\sigma_i{}^2 = \alpha_0 + z_i\alpha$$

- a więc

$$Var(\varepsilon) = \Omega(\alpha_0, \alpha)$$

- Można ją wykryć za pomocą testu Breuscha-Pagana.

# SUMNK

- Etapy estymacji za pomocą SUMNK:

**1.** Szacujemy model za pomocą MNK, uzyskując zgodny estymator $b_{MNK}$

**2.** Na podstawie wektora reszt $e$ szacujemy model pomocniczy, z którego otrzymujemy zgodny estymator $\theta$

**3.** Powtórnie szacujemy parametry modelu stosując estymator UMNK, nieznaną macierz $\Omega$ zastępujemy jej oszacowaniem $\Omega(\hat{\theta})$

# SUMNK

**4.** Uzyskany estymator SUMNK:

$$b_{SUMNK} = \left[ X'\Omega^{-1}\left(\widehat{\theta}\right) X \right]^{-1} X'\Omega^{-1}\left(\widehat{\theta}\right) y$$

# Plan zajęć

1. Konsekwencje heteroskedastyczności i autokorelacji

2. Uogólniona MNK

3. Stosowalna Uogólniona MNK

4. Odporne macierze wariancji i kowariancji b

# Odporne macierze wariancji i kowariancji b

- Istnieją **estymatory macierzy wariancji i kowariancji**, które są **zgodne** w przypadku występowania heteroskedastyczności lub autokorelacji

→ odporne (robust) estymatory wariancji

- Stosujemy różne estymatory w zależności od tego czy w modelu występuje heteroskedastyczność czy autokorelacja

  - Najpopularniejszym odpornym na **heteroskedastyczność** estymatorem macierzy wariancji i kowariancji *b* jest estymator White'a
  - Estymator Newey'a-Westa macierzy wariancji i kowariancji *b* stosujemy gdy w modelu występuje **heteroskedastyczność i autokorelacja**
  - Estymator warstwowy (autokorelacja błędu losowego może być skutkiem częściowo nielosowego doboru próby)

# Konsekwencje heteroskedastyczności i autokorelacji

- Macierz wariancji i kowariancji b:

$$Var(b) = E\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right) =$$

$$(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} =$$

$$\sigma^2(X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1}$$

# Estymator odporny White

- Jeśli znalibyśmy macierz wariancji-kowariancji ***Ω***, wtedy estymatorem macierzy wariancji-kowariancji wektora parametrów **β** byłoby

$$Var(b) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}X'X\right)^{-1}\underbrace{\left(\frac{1}{N}X'\Omega X\right)}\left(\frac{1}{N}X'X\right)^{-1}$$

- Jednak macierz ***Ω*** nie jest znana.
- Zachodzi wiec konieczność oszacowania **N(N+1)/2** nieznanych parametrów macierzy na podstawie **N** obserwacji.
- White (1980) pokazał, ze rozwiązaniem jest odmienne spojrzenie na problem.
  - To co jest istotne to uzyskanie ***zgodnego estymatora dla macierzy X'ΩX***, która ma wymiar $K \times K$
  - Ponadto liczba zmiennych w modelu jest zazwyczaj stała i nie zależy od rozmiaru próby.
- Oznaczmy przez $x_i$ i-ty wiersz macierzy obserwacji *X*.

$$X'\Omega X = X'\sigma^2 VX = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i{}^2 x'_i x_i$$

# Estymator odporny White

- White zaproponował by nieznane wariancje zastąpić kwadratami reszt.
- W ten sposób uzyskany estymator jest zgodny.

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i^2 x_i' x_i$$

- W rezultacie otrzymujemy estymator White'a, który jest zgodny w przypadku heteroscedastyczności.

$$\hat{\Sigma}_b = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}X'X\right)^{-1}\hat{S}_0\left(\frac{1}{N}X'X\right)^{-1}$$

# Estymacja macierzy wariancji kowariancji metodą Newey'a-Westa

- Analogicznie do odpornego na heteroskedastyczność estymatora White`a *ekonometrycy Newey i West* zaproponowali odporny na heteroskedastyczność i na autokorelacje (o niesprecyzowanej strukturze) estymator macierzy wariancji-kowariancji dla *b*, oszacowanego za pomocą MNK.

$$\hat{\Sigma}_b = T\left(X'X\right)^{-1}\hat{S}_x\left(X'X\right)^{-1}$$

- Gdzie:

$$\hat{S}_x = \hat{S}_0 + \frac{1}{T}\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=l+1}^{T}\omega_l e_t e_{t-l}\left(x_t x_{t-l}^{'} - x_{t-l} x_t^{'}\right)$$

$$\omega_l = 1 - \frac{l}{L+1}$$

# Pytania teoretyczne

1. Wyjaśnić różnicę między UMNK i SUMNK.

2. (*) Opisać proces szacowania modelu SUMNK na przykładzie usuwania heteroskedastyczności z modelu bądź estymacji za pomocą estymatora Praisa-Winsterna.

3. Jakie są zalety stosowania estymatora MNK w połączeniu z estymatorem odpornym macierzy wariancji i kowariancji w porównaniu do stosowania estymatora UMNK.

# Dziękuję za uwagę