# Dekompozycja wariancji, $R^2$ i jego własności

**Stanisław Cichocki**

**Natalia Nehrebecka**

Wykład 4

# Plan wykładu

- 1. Dobroć dopasowania równania regresji. Współczynnik determinacji $R^2$
  - Dekompozycja wariancji zmiennej zależnej
  - Współczynnik determinacji $R^2$

# Plan wykładu

- 1. Dobroć dopasowania równania regresji. Współczynnik determinacji $R^2$
  - Dekompozycja wariancji zmiennej zależnej
  - Współczynnik determinacji $R^2$

# Dobroć dopasowania równania regresji Współczynnik determinacji $R^2$

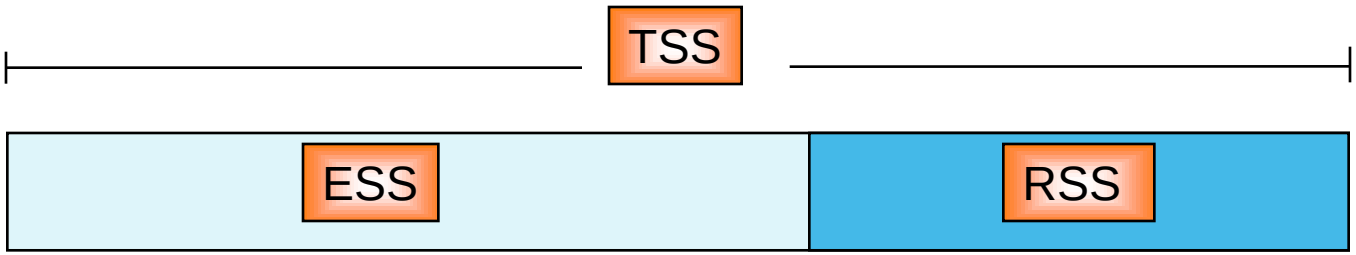
- Dobroć dopasowania równania regresji (do danych empirycznych) wyrażona jest przez tak zwany **współczynnik determinacji liniowej** oznaczany przez $R^2$.

- Współczynnik ten określa jaka część zmienności zmiennej objaśnianej $y$ jest wyjaśniona łącznie przez zmienność wszystkich zmiennych objaśniających $X_2,\cdots X_K$ .

- Jedną z miar zmienności zmiennej jest WARIANCJA.

# Dekompozycja wariancji zmiennej zależnej

Wariancje zmiennej zależnej $y$ można przedstawić jako dekompozycje (podział) na część wyjaśnioną przez model i na część niewyjaśnioną przez model.




Dekompozycja wariancji jest możliwa JEDYNIE dla

**modelu ze stałą**

# Oznaczenia (1/3)

- **Całkowita suma kwadratów:**

Zmienność całkowitą zmiennej objaśnianej $y$ , oznaczaną w literaturze angielskim skrótem TSS (Total Sum of Squares), mierzymy za pomocą sumy kwadratów odchyleń obserwacji zmiennej objaśnianej od średniej:

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

# Oznaczenia (2/3)

- **Wyjaśniona suma kwadratów:**

**Jeśli model zawiera stałą**, to całkowitą sumę kwadratów możemy zdekomponować na dwa składniki, na wyjaśnioną (równaniem regresji) sumę kwadratów, oznaczaną przez ESS (Explained Sum of Squares)

$$ESS = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2$$

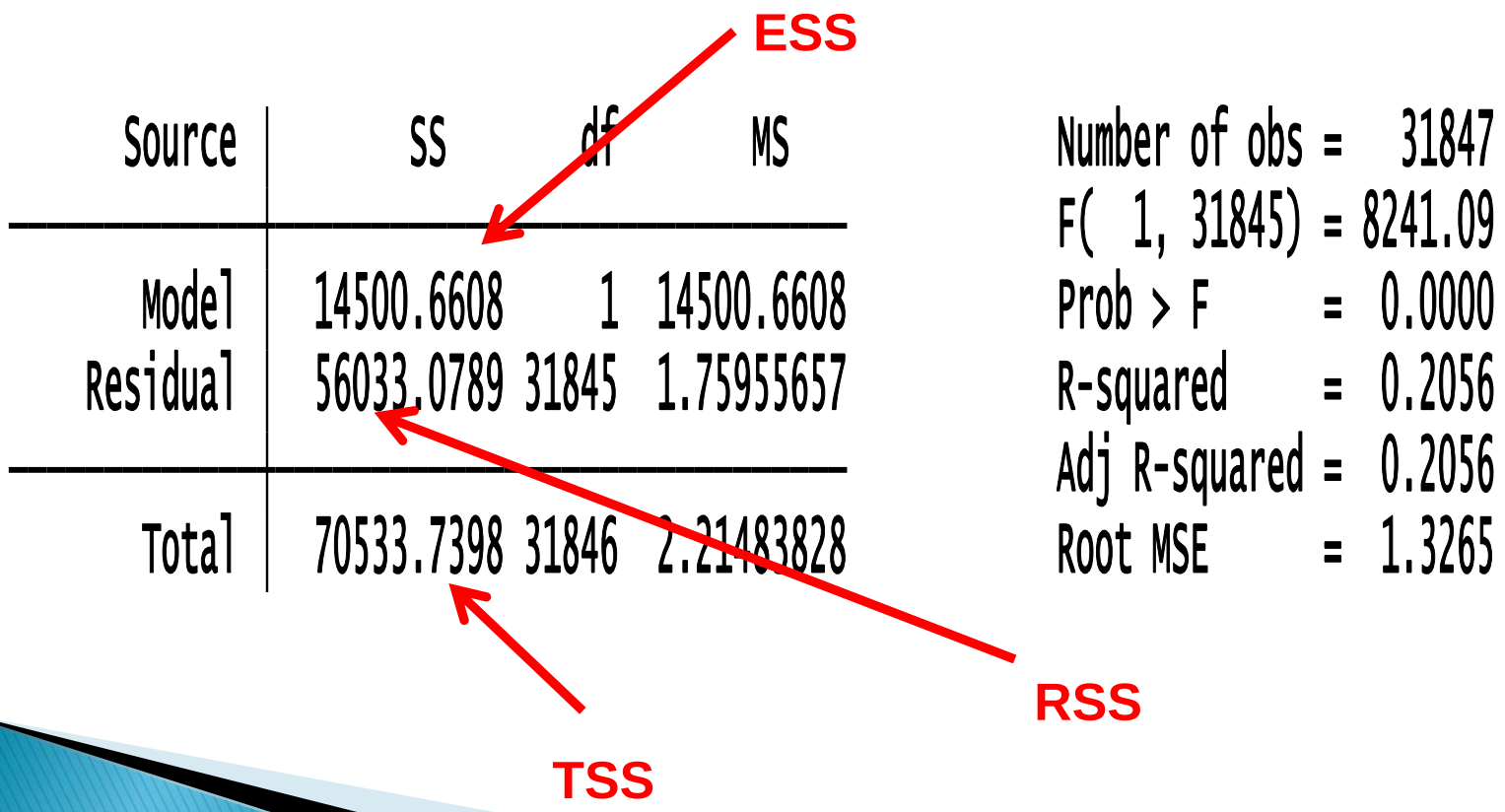
# Oznaczenia (3/3)

- **Resztowa suma kwadratów:**
- i resztową (niewyjaśnioną) sumę kwadratów, oznaczaną przez RSS (Residual Sum of Squares).

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

# Oznaczenia

**Model:** $wydatki_i = \beta_1 + \beta_2 dochod_i + \varepsilon_i$



# Współczynnik determinacji $R^2$

$$R^2 = \frac{wyjasniona\ suma\ kwadratów}{calkowita\ suma\ kwadratów} = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

Dla
**modelu ze stałą**

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

# Współczynnik determinacji $R^2$

**Model:** $wydatki_i = \beta_1 + \beta_2 dochod_i + \varepsilon_i$

ESS

| Source | SS | df | MS |
|---|---|---|---|
| Model | 14500.6608 | 1 | 14500.6608 |
| Residual | 56033.0789 | 31845 | 1.75955657 |
| Total | 70533.7398 | 31846 | 2.21483828 |

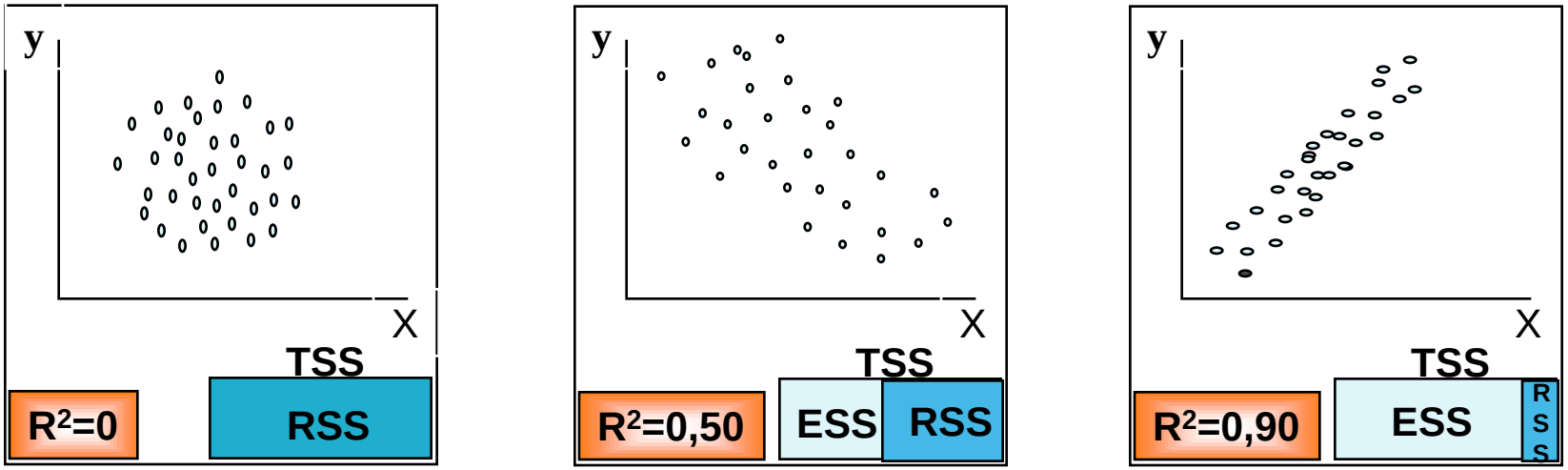
| | |
|---|---|
| Number of obs | = 31847 |
| F( 1, 31845) | = 8241.09 |
| Prob > F | = 0.0000 |
| R-squared | = 0.2056 |
| Adj R-squared | = 0.2056 |
| Root MSE | = 1.3265 |

TSS

RSS

$$R^2 = \frac{14500,66}{70533,74} = 1 - \frac{56033,08}{70533,74} \approx 0,205$$

# Współczynnik determinacji $R^2$




np. jeśli na przykład $R^2 = 0,7$ to możemy powiedzieć, że 70% zmienności zmiennej objaśnianej $y$ jest wyjaśnione przez łączną zmienność wszystkich zmiennych objaśniających, a 30% zmienności jest niewyjaśnione (jest zmiennością resztową).

# Współczynnik determinacji $R^2$

- Przypomnij wzór na wariancję ($s^2_x$) i kowariancję ($s_{xy}$) empiryczną.

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

$$b_2 = \frac{S_{yx}}{S_x^2}$$

# Współczynnik determinacji $R^2$

- W modelu ze stałą i jedną zmienną:

$$R^2 = \hat{\rho}_{xy}^2$$

# Uwaga

- $R^2$ jest WYŁĄCZNIE statystyką opisową i nie należy jej stosować do porównywania modeli.

- Przy szacowaniu kilku modeli dla danej zmiennej zależnej z różną liczbą zmiennych objaśniających na podstawie identycznego zbioru danych, korzystanie ze współczynnika determinacji $R^2$ dla wyboru modelu lepiej dopasowanego do danych empirycznych staje się problematyczne.
- Gdy bowiem dodajemy do równania kolejne zmienne objaśniające to zawsze wzrasta $R^2$.

$$placa_i = \beta_1 + \beta_2 wiek_i + \varepsilon_i \qquad R^2 = 5\%$$

$$placa_i = \beta_1 + \beta_2 wiek_i + \beta_3 plec_i + \varepsilon_i \qquad R^2 = 7\%$$

# Uwaga

- **Wynika to z ogólnych własności optymalizacji:** narzucenie ograniczeń zmniejszające zbiór na którym minimalizujemy funkcję celu prowadzi do uzyskania w minimum wartości funkcji celu większej lub równej wartości funkcji celu w minimum dla minimalizacji bez ograniczeń

# Uwaga

- Z tego powodu za miarę dobroci dopasowania zaproponowano nie $R^2$ , a tak zwany „skorygowany współczynnik determinacji” $\overline{R}^2$.

# Skorygowany współczynnik determinacji $\overline{R}^2$

- $\overline{R}^2$ jest skorygowany ze względu na tak zwaną liczbę stopni swobody, to znaczy ze względu na różnicę między liczbą obserwacji **N**
  a liczbą zmiennych objaśniających **K**.

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{N-1}{N-K}(1-R^2)$$

# Zadanie

Oszacowano dwa modele MNK na próbie liczącej 12 obserwacji i otrzymano następujące wyniki:

a) $\hat{y}_i = 2 + 1,5x_{1i} + 3x_{2i}, \quad R^2 = 0,8$

b) $\hat{y}_i = 1 + 0,8x_{1i} + 4x_{2i} + 6x_{3i}, \quad R^2 = 0,82$

Który z powyższych modeli należy wybrać i dlaczego?

# Pytania teoretyczne

1. Udowodnić, że w modelu ze stałą TSS=ESS+RSS.
2. Podać interpretację $R^2$
3. Wyjaśnić, dlaczego $R^2$ nie można używać do porównywania modeli.

# Dziękuję za uwagę