

# Ekonometria

**Natalia Nehrebecka**  
**Stanisław Cichocki**

Wykład 3

# Plan wykładu

- ▶ MNK - przypadek wielu zmiennych

# Postać modelu - zapis macierzowy

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{K1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{KN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Stąd równanie macierzowe ma postać:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Suma kwadratów reszt - zapis macierzowy

$$S(b) = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = e'e = (y - Xb)'(y - Xb) =$$

$$= y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb$$

- ▶ Ponieważ  $y'Xb = b'X'y$

- ▶ Zatem:  $S(b) = y'y - 2y'Xb + b'X'Xb$

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Warunki pierwszego rzędu

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\partial y' y}{\partial b} - \frac{\partial 2 y' X b}{\partial b} + \frac{\partial b' X' X b}{\partial b} =$$

$$= -2 X' y + 2 X' X b = 0$$

- ▶ bo:

$$\frac{\partial \alpha \beta}{\partial \beta} = \alpha' \quad \frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = (A + A') \beta$$

# Przypomnienie!

$$\frac{\partial a' \beta}{\partial \beta} = a, \quad \frac{\partial a' \beta}{\partial \beta'} = a'$$

- ▶ Niech:  $\beta' = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_k]$ ,  $a' = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k]$ .
- ▶ Niech:  $f(\beta_1, \dots, \beta_k) = a' \beta = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots + a_k \beta_k$

$$\frac{\partial a' \beta}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = a$$

$$\frac{\partial a' \beta}{\partial \beta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a' \beta}{\partial \beta_1} & \frac{\partial a' \beta}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial a' \beta}{\partial \beta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{bmatrix} = a'$$

# Przypomnienie!

$$\frac{\partial A\beta}{\partial \beta'} = A, \quad \frac{\partial \beta' A}{\partial \beta} = A$$

- ▶ Niech  $A$  będzie macierzą wymiaru  $n \times n$  natomiast  $\beta$  wektorem  $n$ -elementowym.

$$A\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}\beta_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}\beta_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}\beta_i \end{bmatrix} \quad \frac{\partial A\beta}{\partial \beta'} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n a_{1i}\beta_i}{\partial \beta'} \\ \frac{\sum_{i=1}^n a_{2i}\beta_i}{\partial \beta'} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^n a_{ni}\beta_i}{\partial \beta'} \end{bmatrix}$$

# Przypomnienie!

$$\frac{\partial A\beta}{\partial \beta'} = A, \quad \frac{\partial \beta' A}{\partial \beta} = A$$

- ▶ Niech  $A$  będzie macierzą wymiaru  $n \times n$  natomiast  $\beta$  wektorem  $n$ -elementowym.

$$\beta' A = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[ \sum_{i=1}^n a_{i1} \beta_i \quad \sum_{i=1}^n a_{i2} \beta_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n a_{in} \beta_i \right]$$

$$\frac{\partial \beta' A}{\partial \beta} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n a_{i1} \beta_i}{\partial \beta} \quad \frac{\sum_{i=1}^n a_{i2} \beta_i}{\partial \beta} \quad \cdots \quad \frac{\sum_{i=1}^n a_{in} \beta_i}{\partial \beta} \right]$$



# Przypomnienie!

$$\frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = (A + A') \beta$$

$$\beta' A \beta = \sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}$$

$$\frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}}{\partial \beta_1} \\ \frac{\sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}}{\partial \beta_n} \end{bmatrix}$$

# Przypomnienie!

- ▶ Jeśli macierz  $A$  jest symetryczna, to  $A = A'$

$$\frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = 2A\beta$$

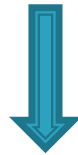
# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Układ równań normalnych

$$-2X'y + 2X'Xb = 0$$

$$X'Xb = X'y \quad / (X'X)^{-1}$$

$$\underbrace{(X'X)^{-1} X'X}_{I} b = (X'X)^{-1} X'y$$



$$b = (X'X)^{-1} X'y$$

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Rozwiązanie układu równań normalnych :

$$X' Xb = X' y$$

- ▶ istnieje o ile macierz  $X$  ma pełny rząd kolumnowy,  
tzn. jej kolumny są liniowo niezależne  $\longrightarrow$   
wtedy macierz  $X'X$  jest nieosobliwa i istnieje  $(X'X)^{-1}$ .

# Przypomnienie!

- ▶ Wektory  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  są liniowo niezależne, jeśli jedynym rozwiązaniem równania:

$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_k\alpha_k = b_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{2n} \end{bmatrix} + \dots + b_k \begin{bmatrix} \alpha_{k1} \\ \alpha_{k2} \\ \vdots \\ \alpha_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ są  $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ MNK nie da się oszacować modelu w którym:
  - ( $K > N$ ) liczba zmiennych (*parametrów*) przekracza liczbę obserwacji

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Warunki drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 S(b)}{\partial b \partial b'} = -2 \frac{\partial X' y}{\partial b'} + 2 \frac{\partial X' X b}{\partial b'} = 2 X' X$$

*$X'X$  – jest dodatnio określona macierz*

# Pytania teoretyczne

1. Co to jest układ równań normalnych?
2. Wyprowadzić estymator MNK dla modelu z wieloma zmiennymi objaśniającymi.
3. Dlaczego nie da się uzyskać oszacowań MNK, jeśli liczba zmiennych objaśniających w modelu jest większa od liczby obserwacji.



**Dziękuję za uwagę**