Metoda Najmniejszych Kwadratów – przypadek wielu zmiennych cz.II

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 3

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

MNK dla modelu z jedną zmienną

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_i}{N} - \overline{yx}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

MNK dla modelu z jedną zmienną

- Przypomnij wzór na wariancję (s^2_x) i kowariancję (s_{xy}) empiryczną.

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

$$b_2 = \frac{S_{yx}}{S_x^2}$$

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Zapis macierzowy modelu liniowego

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{K1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2N} & \cdots & x_{KN} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

Stąd równanie macierzowe ma postać:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Zapis macierzowy modelu liniowego

Inny wariant zapisu modelu:

$$y_i = x_i \beta + \varepsilon_i$$

dla i=1,...N

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

MNK - przypadek wielu zmiennych

- 1. Zapisać model teoretyczny, model wyestymowany, wartości dopasowane oraz reszty dla modelu linowego zawierającego K zmiennych objaśniających wraz ze stałą.

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Suma kwadratów reszt - zapis macierzowy:

$$S(b)=\sum_{i=1}^{N}e_i^2=\begin{bmatrix}e_1 & \cdots & e_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ \vdots \\ e_N\end{bmatrix}=e'e=(y-Xb)'(y-Xb)=$$

$$=y'y-y'Xb-b'X'y+b'X'Xb$$

- Ponieważ $y'Xb=b'X'y$
- Zatem: $S(b)=y'y-2y'Xb+b'X'Xb$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\partial y'y}{\partial b} - \frac{\partial 2y'Xb}{\partial b} + \frac{\partial b'X'Xb}{\partial b} =$$

$$= -2X'y + 2X'Xb = 0$$

- bo:

$$\frac{\partial \omega x}{\partial x} = \omega' \quad \frac{\partial x'Ax}{\partial x} = (A + A')x$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Układ równań normalnych:

$$-2X'y + 2X'Xb = 0$$

$$X'Xb = X'y \quad / (X'X)^{-1}$$

$$\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}\, b = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\Downarrow$$

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Rozwiązanie układu równań normalnych :

$$X'Xb = X'y$$

- istnieje o ile macierz ***X*** ma **pełny rząd kolumnowy**,
  tzn. jej kolumny są liniowo niezależne $\Longrightarrow$
  wtedy macierz X'X jest nieosobliwa i istnieje $(X'X)^{-1}$.

MNK - przypadek wielu zmiennych

- MNK nie da się oszacować modelu w którym:
  - Kolumny macierzy X są liniowo zależne

  i/lub

  - (K>N) liczba zmiennych (parametrów) przekracza liczbę obserwacji

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Warunki drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 S(b)}{\partial b \partial b^{'}} = -2\frac{\partial X^{'} y}{\partial b^{'}} + 2\frac{\partial X' Xb}{\partial b^{'}} = 2X^{'}X$$

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Własności hiperpłaszczyzny regresji

1. $X'e = 0$
2. $\hat{y}'e = 0$

- Dodatkowo dla modelu ze stałą:

3. $\sum_{i=1}^{N} e_i = 0$
4. $\bar{y} = \bar{\hat{y}}$

Pytania teoretyczne

1. Co to jest układ równań normalnych?
2. Wyprowadzić estymator MNK dla modelu z wieloma zmiennymi objaśniającymi.
3. Dlaczego nie da się uzyskać oszacowań MNK, jeśli liczba zmiennych objaśniających w modelu jest większa od liczby obserwacji?
4. Pokazać, że w modelu ze stałą suma reszt jest równa zero.
5. Pokazać, że w modelu ze stałą średnia wartość zmiennej zależnej równa jest średniej z wartości dopasowanych.

Dziękuję za uwagę