

Metoda Najmniejszych Kwadratów – przypadek wielu zmiennych cz.II

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 3

Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
 - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- ▶ 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
 - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- ▶ 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

MNK dla modelu z jedną zmienną

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

$$b_2 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N y_i x_i}{N} - \bar{y} \bar{x}}{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

MNK dla modelu z jedną zmienną

- ▶ Przypomnij wzór na wariancję (s_x^2) i kowariancję (s_{xy}) empiryczną.

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

$$b_2 = \frac{S_{yx}}{S_x^2}$$

Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
 - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- ▶ 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Zapis macierzowy modelu liniowego

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{K1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2N} & \cdots & x_{KN} \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}_\beta + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_\varepsilon$$

Stąd równanie macierzowe ma postać:

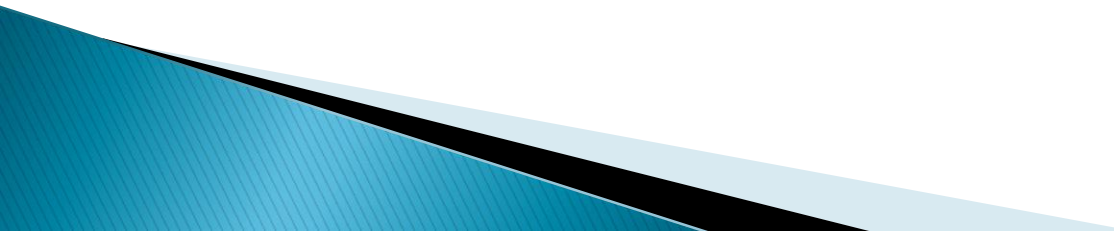
$$y = X\beta + \varepsilon$$

Zapis macierzowy modelu liniowego

Inny wariant zapisu modelu:

$$y_i = x_i \beta + \varepsilon_i$$

dla $i=1, \dots, N$



Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
 - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- ▶ 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ 1. Zapisać model teoretyczny, model wyestymowany, wartości dopasowane oraz reszty dla modelu linowego zawierającego K zmiennych objaśniających wraz ze stałą.

MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Suma kwadratów reszt - zapis macierzowy:

$$S(b) = \sum_{i=1}^N e_i^2 = [e_1 \quad \cdots \quad e_N] \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = e'e = (y - Xb)'(y - Xb) =$$

$$= y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb$$

- ▶ Ponieważ $y'Xb = b'X'y$

- ▶ Zatem: $S(b) = y'y - 2y'Xb + b'X'Xb$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\partial y' y}{\partial b} - \frac{\partial 2 y' X b}{\partial b} + \frac{\partial b' X' X b}{\partial b} =$$

$$= -2X' y + 2X' X b = 0$$

- ▶ bo:

$$\frac{\partial \omega x}{\partial x} = \omega' \quad \frac{\partial x' A x}{\partial x} = (A + A')x$$

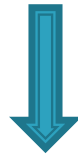
MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Układ równań normalnych:

$$-2X' y + 2X' X b = 0$$

$$X' X b = X' y \quad / (X' X)^{-1}$$

$$\underbrace{(X' X)^{-1} X' X}_I b = (X' X)^{-1} X' y$$



$$b = (X' X)^{-1} X' y$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Rozwiązanie układu równań normalnych :

$$X' Xb = X' y$$

- ▶ istnieje o ile macierz X ma pełny rząd kolumnowy,
tzn. jej kolumny są liniowo niezależne \longrightarrow
wtedy macierz $X'X$ jest nieosobliwa i istnieje $(X'X)^{-1}$.

MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ MNK nie da się oszacować modelu w którym:
 - Kolumny macierzy X są liniowo zależne

i/lub

- ($K > N$) liczba zmiennych (parametrów) przekracza liczbę obserwacji

MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Warunki drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 S(b)}{\partial b \partial b'} = -2 \frac{\partial X' y}{\partial b'} + 2 \frac{\partial X' X b}{\partial b'} = 2 X' X$$

Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
 - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych
- ▶ 4. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Własności hiperpłaszczyzny regresji

1. $X'e = 0$

2. $\hat{y}'e = 0$

▶ Dodatkowo dla modelu ze stałą:

3. $\sum_{i=1}^N e_i = 0$

4. $\bar{y} = \bar{\hat{y}}$

Pytania teoretyczne

1. Co to jest układ równań normalnych?
2. Wyprowadzić estymator MNK dla modelu z wieloma zmiennymi objaśniającymi.
3. Dlaczego nie da się uzyskać oszacowań MNK, jeśli liczba zmiennych objaśniających w modelu jest większa od liczby obserwacji?
4. Pokazać, że w modelu ze stałą suma reszt jest równa zero.
5. Pokazać, że w modelu ze stałą średnia wartość zmiennej zależnej równa jest średniej z wartości dopasowanych.

Dziękuję za uwagę