Testowanie hipotez
Testy diagnostyczne

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 11

Plan wykładu

- 1. Testowanie hipotez łącznych
- 2. Testy diagnostyczne
  - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET
  - Testowanie normalności składników losowych: test Jarque-Berra
  - Testowanie stabilności parametrów modelu: test Chowa
  - Testowanie heteroskedastyczności

Plan wykładu

- 1. Testowanie hipotez łącznych
- 2. Testy diagnostyczne
  - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET
  - Testowanie normalności składników losowych: test Jarque-Berra
  - Testowanie stabilności parametrów modelu: test Chowa
  - Testowanie heteroskedastyczności

Testowanie hipotez złożonych

- Hipoteza łączna:

$$\text{H0:} \quad H\beta = h$$

- Jest to układ g równań liniowych
- Macierz H ma pełen rząd wierszowy równy g (liczba ograniczeń)
- Poszczególne równania powinny być liniowo niezależne
- Układ równań nie powinien być sprzeczny

Testowanie hipotez złożonych

- Przykład – model:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \varepsilon_i$$

Testujemy hipotezę:

$$H0: \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = \beta_4 \end{cases}$$

Testowanie hipotez złożonych

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

Testowanie hipotez złożonych

- Testowanie hipotez prostych nie jest równoważne testowaniu hipotezy łącznej, że wszystkie rozważane hipotezy proste są łącznie prawdziwe

Testowanie hipotez złożonych

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

- Krok 1. Stawiamy przykładową hipotezę zerową Ho:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

- Brak podstaw do odrzucenia tej hipotezy oznacza, że zmienne x_{2i}, x_{3i} są łącznie nieistotne

- **Model bez ograniczeń** $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$
- **Model z ograniczeniami** $y_i = \beta_1 + \beta_4 x_{4i} \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$

Testowanie hipotez złożonych

- Krok 2. Przy założeniu, że postawiona hipoteza zerowa jest prawdziwa, wyznaczamy statystykę testową z rozkładu F:

$$F = \frac{(\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R - \mathbf{e}'\mathbf{e})/g}{\mathbf{e}'\mathbf{e}/(N-K)} = \frac{(R^2 - R_R^{\ 2})/g}{(1-R^2)/(N-K)}$$

- Gdzie:
- **R^2, e'e** oznaczają współczynnik determinacji i sumę kwadratów reszt dla modelu bez ograniczeń
- **R^2_R , $e_R'e_R$** to te sama wielkości, ale dla modelu z ograniczeniami,
- **g** oznacza liczbę ograniczeń,
- **K** – ilość szacowanych parametrów w modelu bez ograniczeń,
- **N** – liczba obserwacji

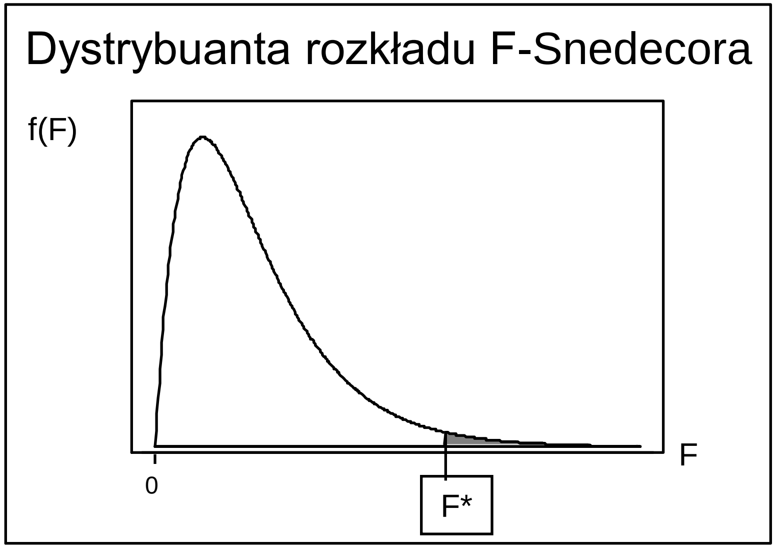
Testowanie hipotez złożonych

- Krok 3. Odczytujemy z tablic rozkładu F wartość krytyczna (α - poziom istotności)

$$F^* = F(g, n-K)$$

Testowanie hipotez złożonych

- Krok 4. Podjęcie decyzji



- $F \geq F*$ - odrzucamy hipotezę
- $F < F*$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Testowanie hipotez złożonych

- Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm (model bez ograniczeń)

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   31705
-------------+------------------------------           F(  6, 31698) = 3651.59
       Model |  2.3693e+10     6  3.9489e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  3.4278e+10 31698  1081405.34           R-squared     =  0.4087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4086
       Total |  5.7971e+10 31704  1828523.21           Root MSE      =  1039.9

------------------------------------------------------------------------------
        wydg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       dochg |   .5818533   .0040164   144.87   0.000      .573981    .5897256
     _Iklm_2 |  -40.65607   23.26644    -1.75   0.081     -86.2592    4.947067
     _Iklm_3 |  -70.57179   25.89099    -2.73   0.006    -121.3191   -19.82444
     _Iklm_4 |  -109.2499   20.60656    -5.30   0.000    -149.6395   -68.86021
     _Iklm_5 |  -153.3497   22.98153    -6.67   0.000    -198.3944    -108.305
     _Iklm_6 |  -173.5506   18.96167    -9.15   0.000    -210.7162    -136.385
       _cons |   836.1774   18.74554    44.61   0.000     799.4354    872.9194
------------------------------------------------------------------------------
```

Testowanie hipotez złożonych

- Przykład

xi: reg wydg dochg (model z ograniczeniami)

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   31705
-------------+------------------------------           F(  1, 31703) =21722.15
       Model |  2.3571e+10     1  2.3571e+10           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  3.4401e+10 31703  1085097.53           R-squared     =  0.4066
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4066
       Total |  5.7971e+10 31704  1828523.21           Root MSE      =  1041.7

------------------------------------------------------------------------------
        wydg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       dochg |   .5874177   .0039856   147.38   0.000     .5796057    .5952296
       _cons |   714.5099   10.00872    71.39   0.000     694.8924    734.1274
------------------------------------------------------------------------------
```

Testowanie hipotez złożonych

$$F = \frac{(\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R - \mathbf{e}'\mathbf{e})/g}{\mathbf{e}'\mathbf{e}/(N-K)} = \frac{(3,4401e+10 - 3,4278e+10)/5}{(3,4278e+10)/(31705-7)} \approx 22,65$$

Testowanie hipotez złożonych

```
test _Iklm_2 _Iklm_3 _Iklm_4 _Iklm_5 _Iklm_6

 ( 1)  _Iklm_2 = 0
 ( 2)  _Iklm_3 = 0
 ( 3)  _Iklm_4 = 0
 ( 4)  _Iklm_5 = 0
 ( 5)  _Iklm_6 = 0

       F(  5, 31698) =   22.65
            Prob > F =    0.0000
```

Plan wykładu

- 1. Testowanie hipotez łącznych
- 2. Testy diagnostyczne
  - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET
  - Test normalności składników losowych: test Jarque-Berra
  - Test stabilności parametrów modelu: test Chowa
  - Testy na heteroscedastyczność

Testy diagnostyczne

- Służą do weryfikacji założeń KMRL
- Sprawdzenie założeń KMRL jest ważne $\Rightarrow$ na nich opierają się własności estymatorów MNK
- Jeśli któreś z założeń nie jest spełnione $\Rightarrow$ należy zastanowić się nad przeformułowaniem modelu lub zastosować bardziej zaawansowane narzędzia ekonometryczne
- Testy są stosowane po wyestymowaniu modelu

Testy diagnostyczne

- W praktyce do testowania jednego założenia KMRL używa się często kilku testów
- Czasami różne testy zastosowane do testowania tej samej hipotezy zerowej dają sprzeczne wnioski

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- Test RESET (*Regression Specification Error Test)*:

$$H_0 : y_i = x_i \beta + \varepsilon_i$$ **- liniowa postać modelu**

$$H_1 : y_i = f(x_i \beta) + \varepsilon_i$$ **- nieliniowa postać modelu**

gdzie $f(\bullet)$ jest nieliniowa

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- Sposób przeprowadzenia testu:

1. estymujemy model: $y_i = x_i\beta + \varepsilon_i$ i uzyskujemy wartości dopasowane

$$\hat{y} = x_i b$$

2. przeprowadzamy regresję pomocniczą:

$$y_i = x_i\beta + \alpha_1 \hat{y}_i^{2} + \ldots + \alpha_p \hat{y}_i^{p+1} + u_i$$

i za pomocą testu F testujemy H0:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$$

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- W dużych próbach rozkład statystyki będzie dążył do rozkładu F-Snedecora o N-p i p stopniach swobody

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   31705
-------------+------------------------------           F(  6, 31698) = 3651.59
       Model |  2.3693e+10     6  3.9489e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  3.4278e+10 31698  1081405.34           R-squared     =  0.4087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4086
       Total |  5.7971e+10 31704  1828523.21           Root MSE      =  1039.9

------------------------------------------------------------------------------
        wydg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       dochg |   .5818533   .0040164   144.87   0.000      .573981    .5897256
     _Iklm_2 |  -40.65607   23.26644    -1.75   0.081     -86.2592    4.947067
     _Iklm_3 |  -70.57179   25.89099    -2.73   0.006    -121.3191   -19.82444
     _Iklm_4 |  -109.2499   20.60656    -5.30   0.000    -149.6395   -68.86021
     _Iklm_5 |  -153.3497   22.98153    -6.67   0.000    -198.3944    -108.305
     _Iklm_6 |  -173.5506   18.96167    -9.15   0.000    -210.7162    -136.385
       _cons |   836.1774   18.74554    44.61   0.000     799.4354    872.9194
```

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

```
Ramsey RESET test using powers of the fitted values of wydg
       Ho:  model has no omitted variables
               F(3, 31695) =    907.11
                  Prob > F =      0.0000
```

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H0?

- Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, 3 \cdots n$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy zerowej o poprawności przyjętej formy funkcyjnej

- **podważa interpretacje ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)**
- **niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)**

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

Przebudowanie modelu aby uwzględniał nieliniowość relacji między zmiennymi (możliwe, że zmienne modelu powinny być poddane jakiejś transformacji – logarytmowanie, potęgowanie, itp.)

Testowanie normalności składników losowych

- Test Jarque – Berra (Test JB):

$$H_0 : \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

- składnik los. ma rozkład normalny

$$H_1 : \varepsilon \nsim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

- składnik los. nie ma rozkładu normalnego

Testowanie normalności składników losowych

- Sposób przeprowadzenia testu:

1. estymujemy model: $y_i = x_i\beta + \varepsilon_i$ i uzyskujemy reszty

2. liczymy współczynnik skośności i kurtozę dla rozkładu reszt:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^{\,3} / N}{\hat{\sigma}^3}$$

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^{\,4} / N}{\hat{\sigma}^4}$$

gdzie $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{N}}$

Testowanie normalności składników losowych

- Sposób przeprowadzenia testu:

3. Porównujemy wielkość skośności i kurtozy uzyskanych z rozkładu reszt z oczekiwanymi wielkościami tych statystyk dla rozkładu normalnego :

$$\Theta_1 = 0$$

$$\Theta_2 = 3$$

statystka testowa: $$LM = N\left[\frac{\hat{\Theta}_1}{6} + \frac{(\hat{\Theta}_2 - 3)^2}{24}\right] \xrightarrow{D} \chi^2$$

Testowanie normalności składników losowych

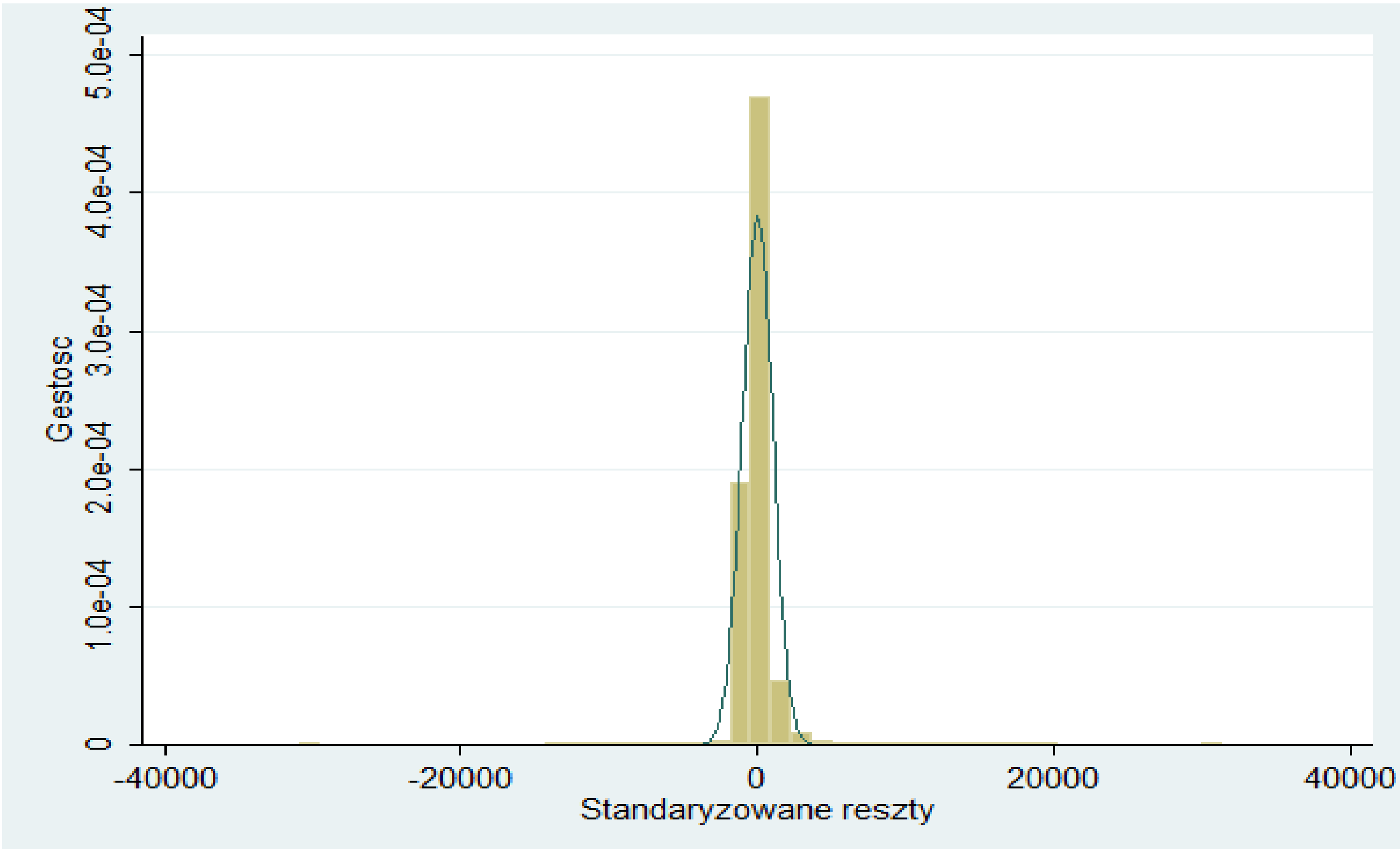
- Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   31705
-------------+------------------------------           F(  6, 31698) = 3651.59
       Model |  2.3693e+10     6  3.9489e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  3.4278e+10 31698  1081405.34           R-squared     =  0.4087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4086
       Total |  5.7971e+10 31704  1828523.21           Root MSE      =  1039.9

------------------------------------------------------------------------------
        wydg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       dochg |   .5818533   .0040164   144.87   0.000      .573981    .5897256
     _Iklm_2 |  -40.65607   23.26644    -1.75   0.081     -86.2592    4.947067
     _Iklm_3 |  -70.57179   25.89099    -2.73   0.006    -121.3191   -19.82444
     _Iklm_4 |  -109.2499   20.60656    -5.30   0.000    -149.6395   -68.86021
     _Iklm_5 |  -153.3497   22.98153    -6.67   0.000    -198.3944    -108.305
     _Iklm_6 |  -173.5506   18.96167    -9.15   0.000    -210.7162    -136.385
       _cons |   836.1774   18.74554    44.61   0.000     799.4354    872.9194
```

Testowanie normalności składników losowych



Testowanie normalności składników losowych

```
 Skewness/Kurtosis tests for Normality
                                                     ------- joint ------
    Variable |    Obs   Pr(Skewness)   Pr(Kurtosis)      chi2(2)    Prob>chi2
-------------+-----------------------------------------------------------
           e |   3.2e+04   0.0000          0.0000     34060.88        0.0000
```

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H0?

- Niespełnione dodatkowe założenie o tym, że składnik losowy ma rozkład normalny

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

- **Próba duża:** rozkłady statystyk są bliskie standardowym rozkładom

- **Mała próba:** jest problemem, gdyż:
  - To założenie jest niezbędne do wyprowadzenie rozkładów statystyk testowych oraz prawidłowego wnioskowania statystycznego.
  - Estymator b uzyskany metoda MNK jest najlepszym estymatorem wśród *liniowych i nieobciążonych* estymatorów $\longrightarrow$ można znaleźć estymator *nieliniowy i nieobciążony o* wariancji mniejszej niż estymator b

Testowanie stabilności parametrów

- **Test Chowa:**

Służy do weryfikacji czy parametry modelu będą takie same dla kilku różnych podpróbek

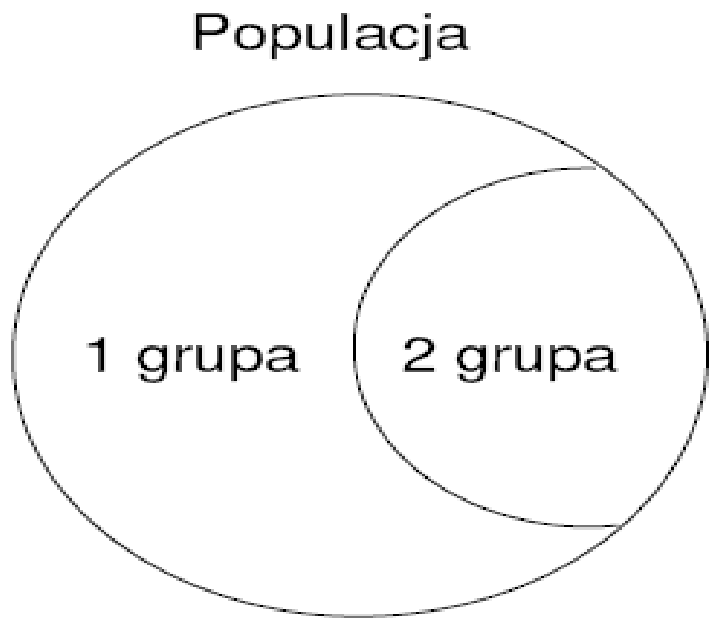
$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m$$

- parametry są takie same w podpróbkach

$$H_1 : \beta_r \neq \beta_s$$

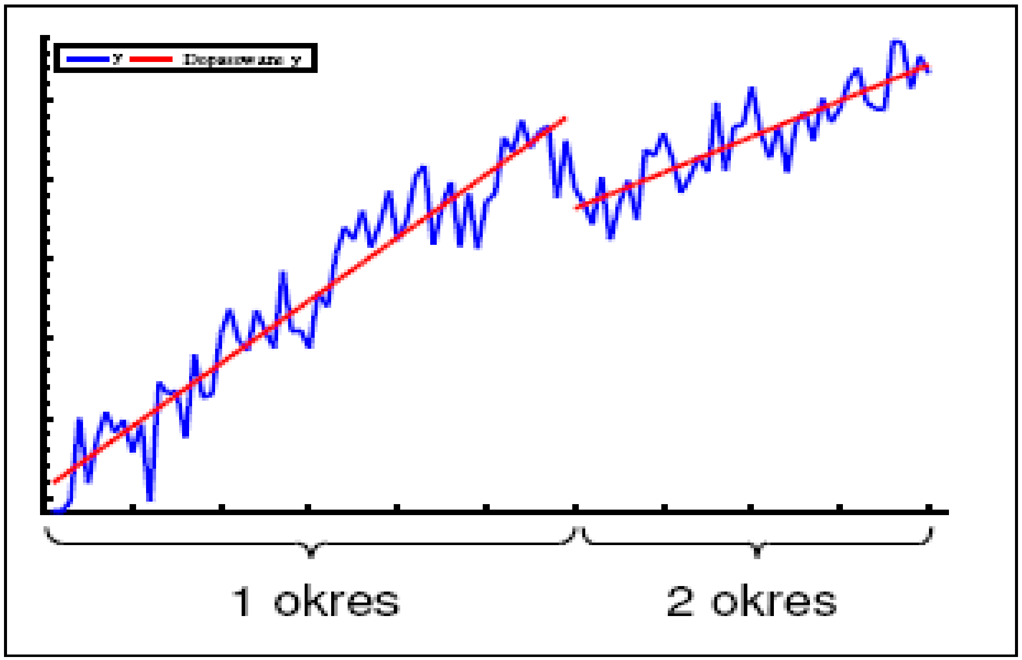
- parametry różnią się w podpróbkach

Testowanie stabilności parametrów - dla próby przekrojowej



Rysunek 4: Podgrupy o podobnej wielkości

Testowanie stabilności parametrów – dla szeregu czasowego



Rysunek 3: Załamanie w parametrach trendu liniowego

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H0?

- Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,3 \cdots n$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy zerowej o tym, że parametry są stabilne

- **podważa interpretacje ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)**
- **niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)**

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

- Problem niestabilności parametrów można rozwiązać poprzez:
  - wprowadzenie do modelu interakcji pomiędzy zmiennymi 0-1 związanymi z podziałem na grupy a odpowiednimi zmiennymi objaśniającymi (w przypadku gdy jedynie część parametrów jest różna dla analizowanych podprób)
  - estymacje osobnych regresji na wyodrębnionych podpróbach

Testowanie heteroskedastyczności

Przypomnienie: Co to znaczy, że w modelu występuje homoskedastyczność/heteroskedastyczność?

- heteroskedastyczność

$$Var(\varepsilon)=\begin{bmatrix} Var(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Testowanie heteroskedastyczności

- Test Goldfelda-Quandta (Test GQ):

$$H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$ dla $i = 1, \ldots, N$

$$H_1 : Var(\varepsilon_i) > Var(\varepsilon_j)$$ dla $z_i > z_j$ gdzie z jest pewną zmienną, od której zależy wariancja błędu losowego

- Hipoteza zerowa: homoskedastyczność

- Hipoteza alternatywna: heteroskedastyczność

Testowanie heteroskedastyczności

- Test Goldfelda-Quandta (Test GQ):
  - z jego konstrukcji wynika, iż można go stosować do wykrywania zależności między wariancją błędu losowego a wielkością jednej zmiennej
  - jako jedyny z testów na heteroskedastyczność ma rozkład wyprowadzony dla małych prób

Testowanie heteroskedastyczności

- Test Breuscha-Pagana (Test BP):

$$H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

dla $i = 1, \ldots, N$

$$H_1 : Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 f(\alpha_0 + z_i \alpha)$$

gdzie $f(\bullet)$ **- funkcja różniczkowalna**

z_i - wektor zmiennych, może zawierać zmienne występujące w wektorze zmiennych objaśniających

Testowanie heteroskedastyczności

- Test Breuscha-Pagana (Test BP):

  - Hipoteza zerowa: homoskedastyczność

  - Hipoteza alternatywna: heteroskedastyczność

  - Szczególnie przydatny, jeżeli wariancja błędu losowego zależy od kilku zmiennych

Testowanie heteroskedastyczności

- Szczególną postacią testu BP jest test White'a $\longrightarrow z_i$ zawiera wszystkie kwadraty i iloczyny krzyżowe zmiennych objaśniających

- Stosujemy gdy interesuje nas samo wykrycie heteroskedastyczności a mniej wykrycie zmiennych, od których zależy wariancja błędu losowego

Testowanie heteroskedastyczności

- Test BP i White’a są bardziej uniwersalne niż test GQ jednak rozkłady statystyk testowych dla tych testów są znane tylko dla dużych prób

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H0?

- Homoskedastyczność składnika losowego – wariancja błędu losowego jest stała dla wszystkich obserwacji:

$$\mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad dla \;\; i = 1, 2, \ldots, N$$

Testowanie heteroskedastyczności

- Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   31705
-------------+------------------------------           F(  6, 31698) = 3651.59
       Model |  2.3693e+10     6  3.9489e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  3.4278e+10 31698  1081405.34           R-squared     =  0.4087
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4086
       Total |  5.7971e+10 31704  1828523.21           Root MSE      =  1039.9

------------------------------------------------------------------------------
        wydg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       dochg |   .5818533   .0040164   144.87   0.000      .573981    .5897256
     _Iklm_2 |  -40.65607   23.26644    -1.75   0.081     -86.2592    4.947067
     _Iklm_3 |  -70.57179   25.89099    -2.73   0.006    -121.3191   -19.82444
     _Iklm_4 |  -109.2499   20.60656    -5.30   0.000    -149.6395   -68.86021
     _Iklm_5 |  -153.3497   22.98153    -6.67   0.000    -198.3944    -108.305
     _Iklm_6 |  -173.5506   18.96167    -9.15   0.000    -210.7162    -136.385
       _cons |   836.1774   18.74554    44.61   0.000     799.4354    872.9194
```

Testowanie heteroskedastyczności

- Przykład

```
 Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity
         Ho: Constant variance
         Variables: fitted values of wydg
         chi2(1)      =129088.50
         Prob > chi2  =   0.0000


White's test for Ho: homoskedasticity
         against Ha: unrestricted heteroskedasticity

         chi2(12)     =   6142.84
         Prob > chi2  =    0.0000
```

Dziękuję za uwagę