Metoda Najmniejszych Kwadratów – przypadek wielu zmiennych cz.II

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 3

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

MNK dla modelu z jedną zmienną

- **Kroki**:
  1. Zapisujemy wzór na sumę kwadratów reszt i podstawiamy za reszty
  2. Liczymy warunki pierwszego rzędu (pochodne)
  3. Przekształcamy tak aby uzyskać oszacowania parametrów

MNK dla modelu z jedną zmienną

- Oszacowania $\mathbf{b_1}$ i $\mathbf{b_2}$ powinny być dobrane tak, by suma kwadratów reszt była jak najmniejsza.

$$S(b_1, b_2) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i^2 - 2y_i b_1 - 2y_i b_2 x_i + 2b_1 b_2 x_i + b_1^2 + b_2^2 x_i^2)$$

MNK dla modelu z jedną zmienną

- Policz pochodne cząstkowe względem parametrów $\mathbf{b_1}$ i $\mathbf{b_2}$ powyższego równania i przyrównaj je do zera.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(b_1, b_2)}{\partial b_1} = 0 \\ \dfrac{\partial S(b_1, b_2)}{\partial b_2} = 0 \end{cases}$$

Warunki pierwszego rzędu

MNK dla modelu z jedną zmienną

- Licząc pochodne dla poszczególnych równań uzyskujemy układ równań zwany **układem równań normalnych**.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \left[-2y_i + 2b_1 + 2b_2 x_i \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \left[-2y_i x_i + 2b_1 x_i + 2b_2 x_i^2 \right] = 0 \end{cases}$$

MNK dla modelu z jedną zmienną

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_i}{N} - \overline{yx}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

MNK dla modelu z jedną zmienną

- Przypomnij wzór na wariancję (s^2_x) i kowariancję (s_{xy}) empiryczną.

$$b_1 = \overline{y} - b_2 \overline{x}$$

$$b_2 = \frac{S_{yx}}{S_x^2}$$

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

Zapis macierzowy modelu liniowego

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{K1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2N} & \cdots & x_{KN} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

Stąd równanie macierzowe ma postać:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Zapis macierzowy modelu liniowego

Inny wariant zapisu modelu:

$$y_i = x_i \beta + \varepsilon_i$$

dla i=1,...N

Plan wykładu

- 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

MNK - przypadek wielu zmiennych

- 1. Zapisać model teoretyczny, model wyestymowany, wartości dopasowane oraz reszty dla modelu linowego zawierającego K zmiennych objaśniających wraz ze stałą.

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Suma kwadratów reszt - zapis macierzowy:

$$S(b)=\sum_{i=1}^{N}e_i^2=\begin{bmatrix}e_1 & \cdots & e_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ \vdots \\ e_N\end{bmatrix}=e'e=(y-Xb)'(y-Xb)=$$

$$=y'y-y'Xb-b'X'y+b'X'Xb$$

- Ponieważ $y'Xb=b'X'y$
- Zatem: $S(b)=y'y-2y'Xb+b'X'Xb$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\partial y'y}{\partial b} - \frac{\partial 2y'Xb}{\partial b} + \frac{\partial b'X'Xb}{\partial b} =$$

$$= -2X'y + 2X'Xb = 0$$

- bo:

$$\frac{\partial \omega x}{\partial x} = \omega' \quad \frac{\partial x'Ax}{\partial x} = (A + A')x$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Układ równań normalnych:

$$-2X'y + 2X'Xb = 0$$

$$X'Xb = X'y \quad / (X'X)^{-1}$$

$$\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}\, b = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\Downarrow$$

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Rozwiązanie układu równań normalnych :

$$X'Xb = X'y$$

- istnieje o ile macierz ***X*** ma **pełny rząd kolumnowy**,
  tzn. jej kolumny są liniowo niezależne $\Longrightarrow$
  wtedy macierz X'X jest nieosobliwa i istnieje $(X'X)^{-1}$.

MNK - przypadek wielu zmiennych

- MNK nie da się oszacować modelu w którym:
  - Kolumny macierzy X są liniowo zależne

  i/lub

  - (K>N) liczba zmiennych (parametrów) przekracza liczbę obserwacji

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Warunki drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 S(b)}{\partial b \partial b^{'}} = -2\frac{\partial X^{'} y}{\partial b^{'}} + 2\frac{\partial X' Xb}{\partial b^{'}} = 2X^{'}X$$

Dziękuję za uwagę