

# Metoda Najmniejszych Kwadratów – przypadek wielu zmiennych cz.II

**Stanisław Cichocki**

**Natalia Nehrebecka**

Wykład 3

# Plan wykładu

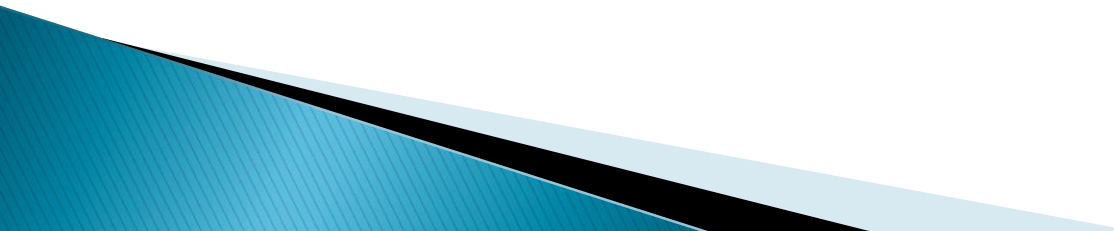
- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

# Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

# MNK dla modelu z jedną zmienną

## ▶ Kroki:

1. Zapisujemy wzór na sumę kwadratów reszt i podstawiamy za reszty
  2. Liczymy warunki pierwszego rzędu (pochodne)
  3. Przekształcamy tak aby uzyskać oszacowania parametrów
- 

# MNK dla modelu z jedną zmienną

- ▶ Oszacowania  $b_1$  i  $b_2$  powinny być dobrane tak, by suma kwadratów reszt była jak najmniejsza.

$$S(b_1, b_2) = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N (y_i^2 - 2y_i b_1 - 2y_i b_2 x_i + 2b_1 b_2 x_i + b_1^2 + b_2^2 x_i^2)$$

# MNK dla modelu z jedną zmienną

- ▶ Policz pochodne cząstkowe względem parametrów  $b_1$  i  $b_2$  powyższego równania i przyrównaj je do zera.

$$\begin{cases} \frac{\partial S(b_1, b_2)}{\partial b_1} = 0 \\ \frac{\partial S(b_1, b_2)}{\partial b_2} = 0 \end{cases}$$

Warunki pierwszego rzędu

# MNK dla modelu z jedną zmienną

- ▶ Licząc pochodne dla poszczególnych równań uzyskujemy układ równań zwany **układem równań normalnych**.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N [-2y_i + 2b_1 + 2b_2x_i] = 0 \\ \sum_{i=1}^N [-2y_ix_i + 2b_1x_i + 2b_2x_i^2] = 0 \end{cases}$$

# MNK dla modelu z jedną zmienną

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

$$b_2 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N y_i x_i}{N} - \bar{y} \bar{x}}{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$



# MNK dla modelu z jedną zmienną

- ▶ Przypomnij wzór na wariancję ( $s_x^2$ ) i kowariancję ( $s_{xy}$ ) empiryczną.

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

$$b_2 = \frac{S_{yx}}{S_x^2}$$

# Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

# Zapis macierzowy modelu liniowego

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{K1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2N} & \cdots & x_{KN} \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}_\beta + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_\varepsilon$$

Stąd równanie macierzowe ma postać:

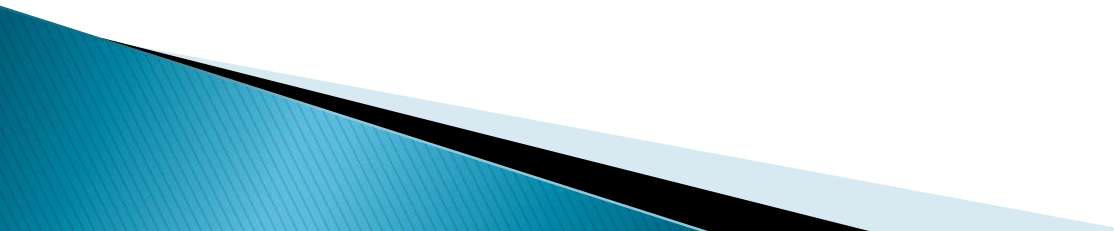
$$y = X\beta + \varepsilon$$

# Zapis macierzowy modelu liniowego

Inny wariant zapisu modelu:

$$y_i = x_i \beta + \varepsilon_i$$

dla  $i=1, \dots, N$



# Plan wykładu

- ▶ 1. MNK dla modelu z jedną zmienną
- ▶ 2. Model liniowy
  - Zapis macierzowy modelu liniowego
- ▶ 3. MNK – przypadek wielu zmiennych

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ 1. Zapisać model teoretyczny, model wyestymowany, wartości dopasowane oraz reszty dla modelu linowego zawierającego  $K$  zmiennych objaśniających wraz ze stałą.

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Suma kwadratów reszt - zapis macierzowy:

$$S(b) = \sum_{i=1}^N e_i^2 = [e_1 \quad \cdots \quad e_N] \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = e'e = (y - Xb)'(y - Xb) =$$

$$= y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb$$

- ▶ Ponieważ  $y'Xb = b'X'y$

- ▶ Zatem:  $S(b) = y'y - 2y'Xb + b'X'Xb$

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\partial y' y}{\partial b} - \frac{\partial 2 y' X b}{\partial b} + \frac{\partial b' X' X b}{\partial b} =$$

$$= -2X' y + 2X' X b = 0$$

- ▶ bo:

$$\frac{\partial \omega x}{\partial x} = \omega' \quad \frac{\partial x' A x}{\partial x} = (A + A')x$$



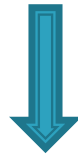
# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Układ równań normalnych:

$$-2X' y + 2X' Xb = 0$$

$$X' Xb = X' y \quad / (X' X)^{-1}$$

$$\underbrace{(X' X)^{-1} X' X}_{I} b = (X' X)^{-1} X' y$$



$$b = (X' X)^{-1} X' y$$

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Rozwiązanie układu równań normalnych :

$$X' Xb = X' y$$

- ▶ istnieje o ile macierz  $X$  ma pełny rząd kolumnowy, tzn. jej kolumny są liniowo niezależne  $\longrightarrow$  wtedy macierz  $X'X$  jest nieosobliwa i istnieje  $(X'X)^{-1}$ .

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ MNK nie da się oszacować modelu w którym:
  - Kolumny macierzy  $X$  są liniowo zależne

i/lub

- ( $K > N$ ) liczba zmiennych (parametrów) przekracza liczbę obserwacji

# MNK - przypadek wielu zmiennych

- ▶ Warunki drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 S(b)}{\partial b \partial b'} = -2 \frac{\partial X' y}{\partial b'} + 2 \frac{\partial X' X b}{\partial b'} = 2 X' X$$

**Dziękuję za uwagę**