Testy diagnostyczne
Autokorelacja
Heteroskedastyczność

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 13

Plan wykładu

- 1. Autokorelacja
  - Konsekwencje
  - Testowanie autokorelacji
- 2. Metody radzenia sobie z heteroskedastycznością i autokorelacją
  - Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (UMNK)
  - Stosowalna Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (SUMNK)
  - Odporne macierze wariancji i kowariancji

Plan wykładu

- 1. Autokorelacja
  - Konsekwencje
  - Testowanie autokorelacji
- 2. Metody radzenia sobie z heteroskedastycznością i autokorelacją
  - Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (UMNK)
  - Stosowalna Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (SUMNK)
  - Odporne macierze wariancji i kowariancji

Autokorelacja

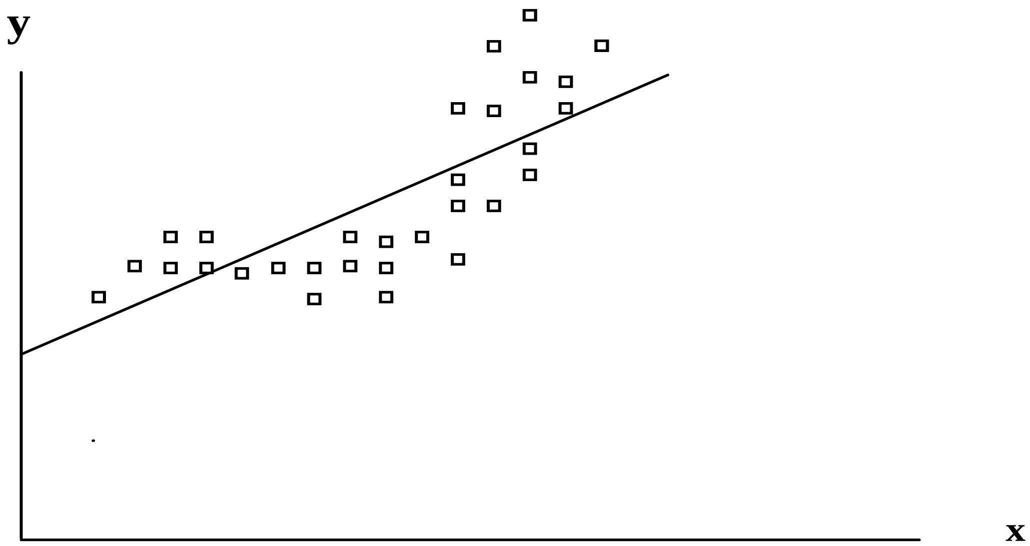
Przypomnienie: Co to znaczy, że w modelu występuje autokorelacja?

-Brak autokorelacji

$$Var(\varepsilon)=\begin{bmatrix} Var(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Autokorelacja

- Przypadek zerowych kowariancji dla różnych zaburzeń losowych ε_i oraz ε_j nazywamy brakiem autokorelacji zaburzeń. Oznacza to, że **zaburzenia losowe dla różnych obserwacji są niezależne**, a przez to nieskorelowane, a więc nie mają tendencji do gromadzenia się np. wokół dodatnich lub ujemnych (lub naprzemiennie dodatnich i ujemnych) wartości



Rys. 2. **Autokorelacja**

Autokorelacja

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) > 0$ dla $i \neq j$ - dodatnia autokorelacja

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) < 0$ dla $i \neq j$ - ujemna autokorelacja

Sferyczność błędów losowych

- Jeżeli założenie o homoskedastyczności i autokorelacji jest spełnione to błędy losowe są **sferyczne**

- Jeżeli, któreś z tych założeń nie jest spełnione to błędy losowe są **niesferyczne** a macierz wariancji i kowariancji ma postać dowolnej macierzy symetrycznej i dodatnio półokreślonej:

$$Var(\varepsilon) = \Omega = \sigma^2 V$$

Konsekwencje autokorelacji

- Estymator b jest nadal **nieobciążony**:

$$E(b) = E\left[(X'X)^{-1}X'y\right] =$$

$$E\left[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right] =$$

$$\beta + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) = \beta$$

- Nie będzie on jednak **efektywny** $\Longrightarrow$ można znaleźć estymator o mniejszej wariancji

Konsekwencje autokorelacji

- Macierz wariancji i kowariancji b:

$$Var(b) = E\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right) =$$

$$(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} =$$

$$\sigma^2(X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1}$$

- Wzór ten różni się znacznie od prawidłowego wzoru na wariancję MNK:

$$Var(b) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Konsekwencje autokorelacji

- W rezultacie estymator macierzy wariancji i kowariancji b, którym posługiwaliśmy się do tej pory, nie będzie dobrym oszacowaniem macierzy wariancji i kowariancji b

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):

$$H_0 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$$ **- brak autokorelacji**

$$H_1 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \neq 0$$ **- autokorelacja**

gdzie $t = 1, \ldots, T$

Testowanie autokorelacji

- **Test Durbina-Watsona (Test DW):**

- specjalne tablice z wartościami krytycznymi: d_l, d_u

1. Statystyka DW<2

a) DW < d_l - odrzucamy hipotezę zerową o braku autokorelacji i przyjmujemy hipotezę o dodatniej autokorelacji

b) d_l < DW < d_u - brak konkluzji

c) DW > d_u - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):

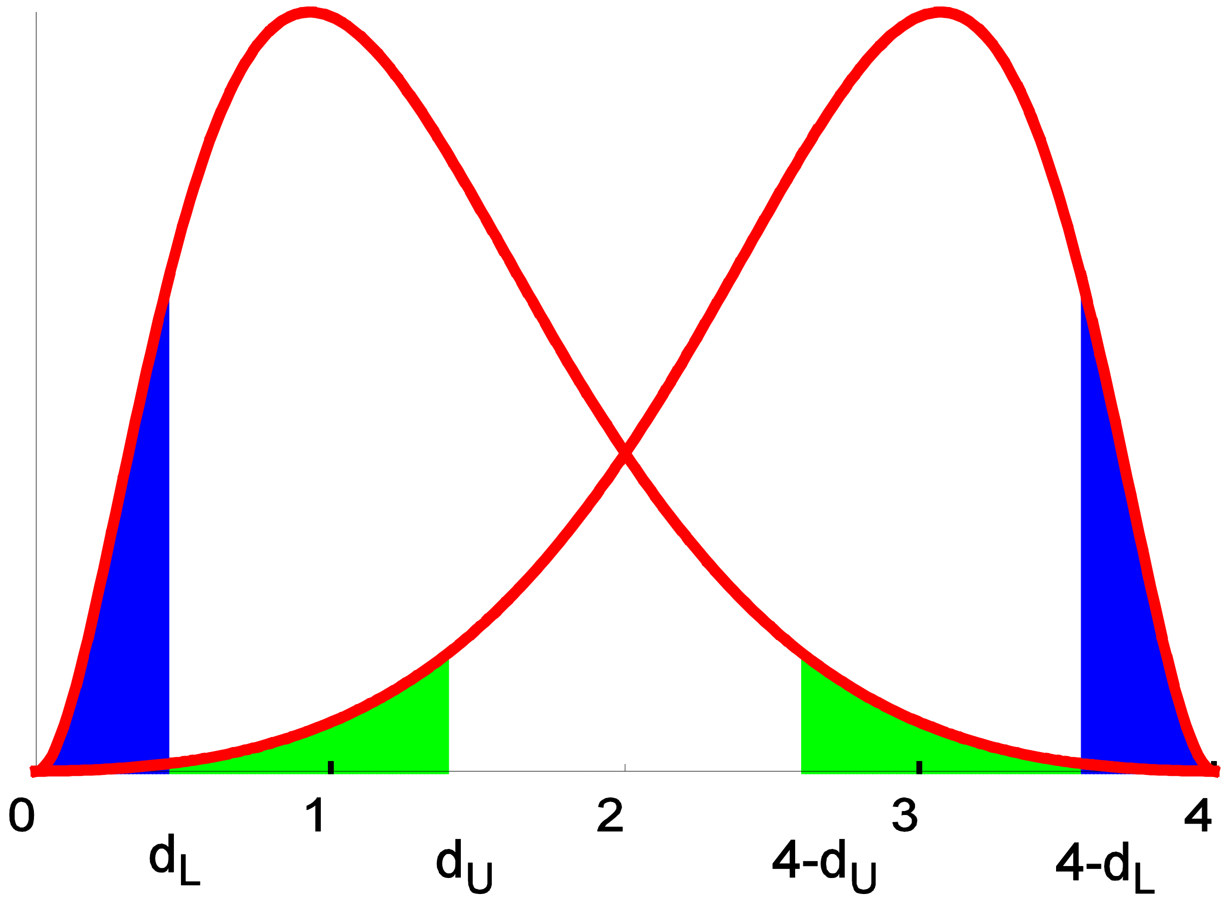
2. Statystyka DW >2

a) DW > $4 - d_l$ - odrzucamy hipotezę zerową o braku autokorelacji i przyjmujemy hipotezę o ujemnej autokorelacji

b) $4 - d_u$ < DW < $4 - d_l$ - brak konkluzji

c) DW < $4 - d_u$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji

Testowanie autokorelacji



Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test BW):

- Do badania autokorelacji I rzędu (między $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$)

- Rozkład statystki testowej wyprowadzony dla małych prób

- Nie można go stosować w modelach gdzie jedną ze zmiennych objaśniających jest opóźniona zmienna zależna

- Wada: niestandardowy rozkład i możliwość wystąpienia braku konkluzji

Testowanie autokorelacji

- Test Breuscha-Godfreya (Test BG):

- Do badania autokorelacji wyższego rzędu

- Można go stosować w modelach gdzie występują opóźnione zmienne zależne

Testowanie autokorelacji

- Test Breuscha-Godfreya (Test BG):

$$H_0 : Cov(\varepsilon_{t,} \varepsilon_{t-i}) = 0$$ **gdzie** $$i = 1, \ldots, s$$

$$H_1 : \varepsilon_t = \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \gamma_s \varepsilon_{t-s} + u_t$$ **gdzie** $$Var(u) = \sigma_u^2 I$$

- Hipoteza zerowa: brak autokorelacji

- Hipoteza alternatywna: autokorelacja

Testowanie autokorelacji

- Test Breuscha-Godfreya (Test BG) – sposób przeprowadzenia testu:

1. przeprowadzamy regresję y_i na x_i i uzyskujemy reszty

2. przeprowadzamy regresję pomocniczą:

$$e_t = x_t \hat{\mu} + \hat{\gamma}_1 e_{t-1} + \ldots + \hat{\gamma}_s e_{t-s} + \hat{u}_t$$

i testujemy H0: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_s = 0$

Testowanie autokorelacji

- Statystyka testowa:

$$LM = TR^2 \xrightarrow{D} \chi_p^2$$

lub statystyka F

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H0?

- Brak autokorelacji błędu losowego – kowariancja dwóch różnych błędów losowych jest zerowa:

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad dla \quad i \neq j$$

Plan wykładu

- 1. Autokorelacja
  - Konsekwencje
  - Testowanie autokorelacji
- 2. Metody radzenia sobie z heteroskedastycznością i autokorelacją
  - Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (UMNK)
  - Stosowalna Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (SUMNK)
  - Odporne macierze wariancji i kowariancji

UMNK

- Jednym z możliwych sposobów rozwiązania problemu niesferyczności błędu losowego $\longrightarrow$ oszacowanie macierzy wariancji błędu losowego
- Zastosowana metoda estymacji jest uogólnieniem MNK dla przypadku, gdy błędy losowe są niesferyczne
- Taki uogólniony estymator można uzyskać bezpośrednio z zadania na minimalizację sumy kwadratów reszt
- Wyprowadzimy go sprowadzając model uogólniony do KMRL

UMNK

- Założenia analogiczne do KMRL, ale różniące się brakiem założenia o homoskedastyczności i autokorelacji:

1. Model jest liniowy: $y = X\beta + \varepsilon$

2. **X** jest nielosowe

3. $E(\varepsilon) = 0$

4. $Var(\varepsilon) = \Omega = \sigma^2 V, \text{ gdzie } V \text{ jest znana}$

UMNK

- Dla dodatnio określonej i symetrycznej macierzy V można zawsze znaleźć taką nieosobliwą macierz z elementami rzeczywistymi, L że

$$LVL' = I$$

$$V = L^{-1}L^{-1'}$$

$$L'L = V^{-1}$$

UMNK

- Mnożąc, $y = X\beta + \varepsilon$ przez $\boldsymbol{L}$:

$$Ly = LX\beta + L\varepsilon$$

- Definiujemy nowe zmienne, będące przekształceniem zmiennych pierwotnych:

$$y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

UMNK

- Wariancja ε^* :

$$Var(\varepsilon^*) = Var(L\varepsilon) = LVar(\varepsilon)L' = \sigma^2 LVL' = \sigma^2 I$$

- Błędy losowe są homosekdastyczne i nieskorelowane.

- Model przekształcony będzie spełniał wszystkie założenia KMRL

$\Longrightarrow$ prawdziwe są wszystkie wnioski na temat własności MNK

UMNK

- Estymator Ugólnionej Metody Najmniejszych Kwadratów (Generalized Least Squares – GLS):

$$b_{UMNK} = (X^{*}{}'X^{*})^{-1}X^{*}{}'y^{*} = [(LX)'(LX)]^{-1}(LX)'Ly$$

$$= (X'L'LX)^{-1}X'L'Ly = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

$$= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$$

UMNK

- Macierz wariancji kowariancji estymatora b_{UMNK}

$$Var(b_{UMNK}) = \sigma^2 (X^{*}{'}X^{*})^{-1} = \sigma^2 [(LX)'(LX)]^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'L'LX)^{-1} = \sigma^2 (X'V^{-1}X)^{-1} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

UMNK

- Reszty w przypadku estymatora UMNK:

$$y - \hat{y} = y - Xb_{UMNK} = e_{UMNK}$$

UMNK

- Estymator s^2:

$$s^2_{UMNK} = \frac{e^{*}\,'e^{*}}{N-K} = \frac{(y^{*} - X^{*}b_{UMNK})'(y^{*} - X^{*}b_{UMNK})}{N-K}$$

$$= \frac{(y - Xb_{UMNK})'V^{-1}(y - Xb_{UMNK})}{N-K} = \frac{e'_{UMNK}V^{-1}e_{UMNK}}{N-K}$$

UMNK

- Model przekształcony będzie spełniał wszystkie założenia KMRL $\Rightarrow$ estymator UMNK ma wszystkie własności estymatora MNK

- Przy założeniu normalności rozkładu reszt sposób testowania hipotez w UMNK jest identyczny jak w MNK

UMNK

- Prawdziwe będzie też uogólnienie twierdzenia Gaussa Markowa:

Twierdzenie Aitkena: Estymator Uogólnionej Metody Najmniejszych Kwadratów jest najlepszym, liniowym i nieobciążonym estymatorem parametru β o ile macierz Ω lub macierz V jest znana.

Problem: prawie nigdy nie znamy V

UMNK

- Jednym z przypadków kiedy forma macierzy wariancji jest znana

  $\longrightarrow$ Ważona Metoda Najmniejszych Kwadratów

- W modelu występuje jedynie heteroskedastyczność:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & \mathrm{v}_n \end{bmatrix} = \sigma^2 V$$

UMNK

- Zakładając, że v_i są znane:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{v_1}} & & 0 \\ & & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{v_n}} \end{bmatrix}$$

UMNK

- Można pokazać, iż stosując macierz L:

$$y_i^* = \frac{y_i}{\sqrt{v_i}}$$

$$x^*_{k,i} = \frac{x_{k,i}}{\sqrt{v_i}}$$

- v_i - można traktować jako wagi przypisywane obserwacjom

UMNK

- Im wyższa wariancja błędu losowego, tym niższą wagę przypisujemy obserwacjom

SUMNK

- Gdy elementy macierzy V są nieznane $\longrightarrow$ używamy estymatora UMNK zastępując V oszacowaniem $\hat{V}$

  $\longrightarrow$ metoda ta to Stosowalna Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (Feasible Generalized Least Squares)

SUMNK

- Istota: budujemy dodatkowy model dla wariancji i kowariancji tak aby znaleźć funkcję $\Omega(\Theta)$, taką że:

$$\Omega = \Omega(\Theta)$$

i

$$wymiar\ \Theta << N$$

W takim wypadku szacowanie Ω sprowadza się do szacowania Θ

a estymatorem Ω będzie $\hat{\Omega} = \Omega(\hat{\Theta})$

SUMNK

- Etapy estymacji za pomocą SUMNK:

1. Szacujemy model za pomocą MNK uzyskując b_{MNK}

2. Na podstawie wektora reszt szacujemy model pomocniczy, z którego otrzymujemy oszacowania Θ (oszacowania te oznaczamy jako $\hat{\Theta}$)

3. Powtórnie szacujemy parametry modelu stosując estymator UMNK, nieznaną macierz Ω zastępujemy jej oszacowaniem

$$\hat{\Omega} = \Omega(\hat{\Theta})$$

SUMNK

4. Uzyskany estymator SUMNK:

$$b_{SUMNK} = [X'\hat{\Omega}^{-1}X]^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y$$

Odporne estymatory macierzy wariancji i kowariancji

- Bazują na formie macierzy wariancji estymatora b_{MNK} dla niesferycznych błędów losowych

$$Var(b_{MNK}) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}X'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}X'\Omega X\right)\left(\frac{1}{N}X'X\right)^{-1}$$

- Konkretna postać estymatorów odpornych macierzy wariancji zależy od tego, czy w modelu występuje jedynie heteroskedastyczność, czy tez autokorelacja

Odporne estymatory macierzy wariancji i kowariancji

- Najpopularniejszym odpornym na heteroskedastyczność estymatorem macierzy wariancji i kowariancji **b** jest estymator White'a

- Umożliwia przeprowadzenie wnioskowania statystycznego bez konieczności szacowania modelu dla wariancji i kowariancji

- Znacznie łatwiejszy w stosowaniu niż SUMNK

Odporne estymatory macierzy wariancji i kowariancji

```
reg wydg dochg los

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   31705
-------------+------------------------------           F(  2, 31702) =11100.72
       Model |  2.3877e+10     2  1.1938e+10           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  3.4095e+10 31702  1075469.35           R-squared     =  0.4119
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4118
       Total |  5.7971e+10 31704  1828523.21           Root MSE      =    1037

------------------------------------------------------------------------------
        wydg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       dochg |   .5683134   .0041262   137.73   0.000     .5602259     .576401
         los |   65.12119   3.858651    16.88   0.000     57.55809     72.6843
       _cons |   550.8444   13.90437    39.62   0.000     523.5913    578.0976
------------------------------------------------------------------------------
```

Odporne estymatory macierzy wariancji i kowariancji

```
Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity
         Ho: Constant variance
         Variables: fitted values of wydg

         chi2(1)      =121623.16
         Prob > chi2  =   0.0000


White's test for Ho: homoskedasticity
         against Ha: unrestricted heteroskedasticity

         chi2(5)      =   5700.95
         Prob > chi2  =    0.0000
```

Odporne estymatory macierzy wariancji i kowariancji

```
reg wydg dochg los, robust

Linear regression                                      Number of obs =   31705
                                                       F(  2, 31702) = 1785.95
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.4119
                                                       Root MSE      =    1037

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
        wydg |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       dochg |   .5683134   .0319817    17.77   0.000      .505628    .6309989
         los |   65.12119   8.640123     7.54   0.000     48.18621    82.05617
       _cons |   550.8444   40.10087    13.74   0.000     472.2452    629.4437
------------------------------------------------------------------------------
```

Odporne estymatory macierzy wariancji i kowariancji

- Estymator Newey'a-Westa macierzy wariancji i kowariancji

  $\longrightarrow$ gdy w modelu występuje heteroskedastyczność i autokorelacja

Pytania teoretyczne

1. Za pomocą jakich testów testuje się autokorelację? Jakiemu założeniu KMRL odpowiada H0 w tych testach? Jakie są hipotezy alternatywne w tych testach?
2. (*) Podać postać analityczną testu Durbina-Watsona i postać regresji pomocniczej w przypadku testu Breuscha-Godfreya.
3. Pokazać, w jaki sposób można, w przypadku znanej macierzy Ω, sprowadzić model z niesferycznymi błędami losowymi do modelu spełniającego założenia KMRL.
4. (*) Wyjaśnić do czego powinny być proporcjonalne wagi w Ważonej Metodzie Najmniejszych Kwadratów. Odpowiedź uzasadnić.

Pytania teoretyczne

5. Wyjaśnić różnicę między UMNK i SUMNK.

Dziękuję za uwagę