

Testowanie hipotez

Testy diagnostyczne

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 11

Plan wykładu

- ▶ 1. Testowanie hipotez łącznych
- ▶ 2. Testy diagnostyczne
 - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET
 - Testowanie normalności składników losowych: test Jarque-Berra

Plan wykładu

- ▶ 1. Testowanie hipotez łącznych
- ▶ 2. Testy diagnostyczne
 - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET
 - Testowanie normalności składników losowych: test Jarque-Berra

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ Hipoteza łączna:

$$H_0: H\beta = h$$

- ▶ Jest to układ g równań liniowych
- ▶ Macierz H ma pełen rząd wierszowy równy g (liczba ograniczeń)
- ▶ Poszczególne równania powinny być liniowo niezależne
- ▶ Układ równań nie powinien być sprzeczny

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ Przykład – model:

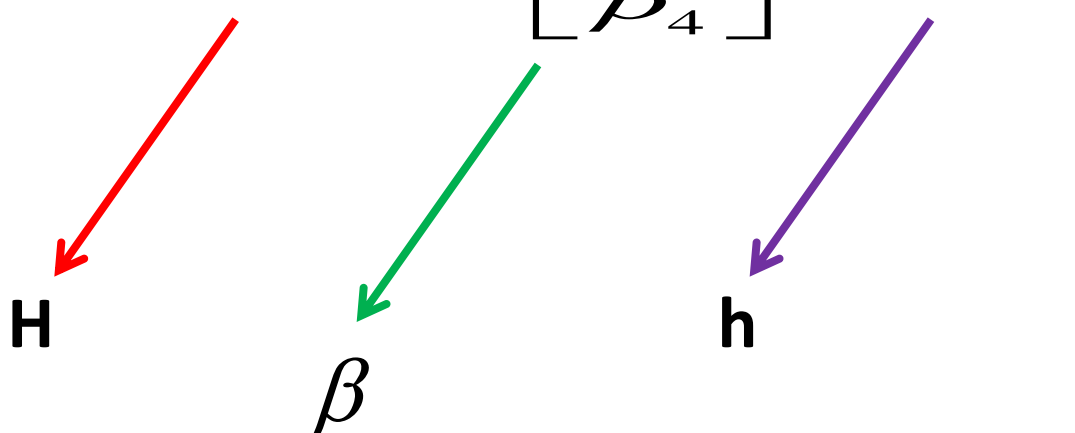
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \varepsilon_i$$

Testujemy hipotezę:

$$H_0: \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = \beta_4 \end{cases}$$

Testowanie hipotez złożonych

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



H β **h**

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ Testowanie hipotez prostych nie jest równoważne testowaniu hipotezy łącznej, że wszystkie rozważane hipotezy proste są łącznie prawdziwe

Testowanie hipotez złożonych

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

- ▶ **Krok 1.** Stawiamy przykładową hipotezę zerową H_0 :

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

- ▶ Brak podstaw do odrzucenia tej hipotezy oznacza, że zmienne x_{2i}, x_{3i} są łącznie nieistotne

- ▶ **Model bez ograniczeń** $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$
- ▶ **Model z ograniczeniami** $y_i = \beta_1 + \beta_4 x_{4i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ **Krok 2.** Przy założeniu, że postawiona hipoteza zerowa jest prawdziwa, wyznaczamy statystykę testową z rozkładu F:

$$F = \frac{(\mathbf{e}'_R \mathbf{e}_R - \mathbf{e}'\mathbf{e}) / g}{\mathbf{e}'\mathbf{e} / (N - K)} = \frac{(R^2 - R_R^2) / g}{(1 - R^2) / (N - K)}$$

- ▶ Gdzie:
- ▶ $R^2, \mathbf{e}'\mathbf{e}$ oznaczają współczynnik determinacji i sumę kwadratów reszt dla modelu bez ograniczeń
- ▶ $R^2_R, \mathbf{e}'_R \mathbf{e}_R$ to te same wielkości, ale dla modelu z ograniczeniami,
- ▶ g oznacza liczbę ograniczeń,
- ▶ K – ilość szacowanych parametrów w modelu bez ograniczeń,
- ▶ N – liczba obserwacji

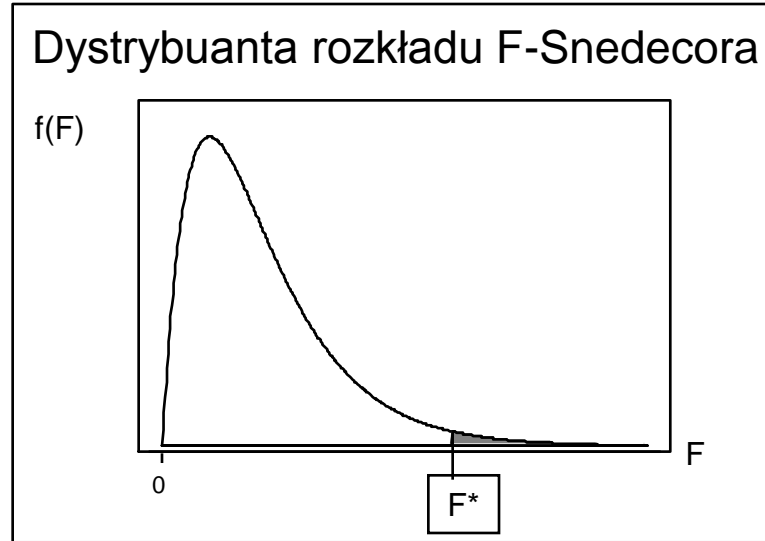
Testowanie hipotez złożonych

- ▶ **Krok 3.** Odczytujemy z tablic rozkładu F wartość krytyczną (α - poziom istotności)

$$F^* = F(g, n - K)$$

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ **Krok 4.** Podjęcie decyzji



- ▶ $F \geq F^*$ - odrzucamy hipotezę
- ▶ $F < F^*$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Testowanie hipotez złożonych

► Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm (model bez ograniczeń)

Source	SS	df	MS	
Model	2.3693e+10	6	3.9489e+09	Number of obs = 31705
Residual	3.4278e+10	31698	1081405.34	F(6, 31698) = 3651.59
				Prob > F = 0.0000
				R-squared = 0.4087
				Adj R-squared = 0.4086
				Root MSE = 1039.9
Total	5.7971e+10	31704	1828523.21	

wydg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dochg	.5818533	.0040164	144.87	0.000	.573981	.5897256
_Iklm_2	-40.65607	23.26644	-1.75	0.081	-86.2592	4.947067
_Iklm_3	-70.57179	25.89099	-2.73	0.006	-121.3191	-19.82444
_Iklm_4	-109.2499	20.60656	-5.30	0.000	-149.6395	-68.86021
_Iklm_5	-153.3497	22.98153	-6.67	0.000	-198.3944	-108.305
_Iklm_6	-173.5506	18.96167	-9.15	0.000	-210.7162	-136.385
_cons	836.1774	18.74554	44.61	0.000	799.4354	872.9194

Testowanie hipotez złożonych

▶ Przykład

xi: reg wydg dochg (model z ograniczeniami)

Source	SS	df	MS			
Model	2.3571e+10	1	2.3571e+10	Number of obs	=	31705
Residual	3.4401e+10	31703	1085097.53	F(1, 31703)	=	21722.15
Total	5.7971e+10	31704	1828523.21	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.4066
				Adj R-squared	=	0.4066
				Root MSE	=	1041.7

wydg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dochg	.5874177	.0039856	147.38	0.000	.5796057	.5952296
_cons	714.5099	10.00872	71.39	0.000	694.8924	734.1274

Testowanie hipotez złożonych

$$F = \frac{(\mathbf{e}'_R \mathbf{e}_R - \mathbf{e}'\mathbf{e}) / g}{\mathbf{e}'\mathbf{e} / (N - K)} = \frac{(3,4401e+10 - 3,4278e+10) / 5}{(3,4278e+10) / (31705 - 7)} \approx 22,65$$

Testowanie hipotez złożonych

```
test _Iklm_2 _Iklm_3 _Iklm_4 _Iklm_5 _Iklm_6
```

```
( 1)  _Iklm_2 = 0
```

```
( 2)  _Iklm_3 = 0
```

```
( 3)  _Iklm_4 = 0
```

```
( 4)  _Iklm_5 = 0
```

```
( 5)  _Iklm_6 = 0
```

```
F( 5, 31698) = 22.65
```

```
Prob > F = 0.0000
```

Plan wykładu

- ▶ 1. Testowanie hipotez łącznych
- ▶ 2. Testy diagnostyczne
 - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET
 - Test normalności składników losowych: test Jarque-Berra

Testy diagnostyczne

- ▶ Służą do weryfikacji założeń KMRL
- ▶ Sprawdzenie założeń KMRL jest ważne \longrightarrow na nich opierają się własności estymatorów MNK
- ▶ Jeśli któreś z założeń nie jest spełnione \longrightarrow należy zastanowić się nad przeformułowaniem modelu lub zastosować bardziej zaawansowane narzędzia ekonometryczne
- ▶ Testy są stosowane po wyestymowaniu modelu

Testy diagnostyczne

- ▶ W praktyce do testowania jednego założenia KMRL używa się często kilku testów
- ▶ Czasami różne testy zastosowane do testowania tej samej hipotezy zerowej dają sprzeczne wnioski

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- Test RESET (*Regression Specification Error Test*):

$$H_0 : y_i = x_i\beta + \varepsilon_i \quad - \text{liniowa postać modelu}$$

$$H_1 : y_i = f(x_i\beta) + \varepsilon_i \quad - \text{nieliniowa postać modelu}$$

gdzie $f(\bullet)$ jest nieliniowa

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

► Sposób przeprowadzenia testu:

1. estymujemy model: $y_i = x_i\beta + \varepsilon_i$ i uzyskujemy wartości dopasowane

$$\hat{y} = x_i\hat{b}$$

2. przeprowadzamy regresję pomocniczą:

$$y_i = x_i\beta + \alpha_1 y_i + \dots + \alpha_p y_i + u_i$$

i za pomocą testu F testujemy H_0 :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- ▶ W dużych próbach rozkład statystyki będzie dążył do rozkładu F-Snedecora o $N-p$ i p stopniach swobody

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

► Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm

Source	SS	df	MS	
Model	2.3693e+10	6	3.9489e+09	Number of obs = 31705
Residual	3.4278e+10	31698	1081405.34	F(6, 31698) = 3651.59
Total	5.7971e+10	31704	1828523.21	Prob > F = 0.0000
				R-squared = 0.4087
				Adj R-squared = 0.4086
				Root MSE = 1039.9

wydg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dochg	.5818533	.0040164	144.87	0.000	.573981	.5897256
_Ik1m_2	-40.65607	23.26644	-1.75	0.081	-86.2592	4.947067
_Ik1m_3	-70.57179	25.89099	-2.73	0.006	-121.3191	-19.82444
_Ik1m_4	-109.2499	20.60656	-5.30	0.000	-149.6395	-68.86021
_Ik1m_5	-153.3497	22.98153	-6.67	0.000	-198.3944	-108.305
_Ik1m_6	-173.5506	18.96167	-9.15	0.000	-210.7162	-136.385
_cons	836.1774	18.74554	44.61	0.000	799.4354	872.9194

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

Ramsey RESET test using powers of the fitted values of `wydg`

Ho: model has no omitted variables

F(3, 31695) = 907.11

Prob > F = 0.0000

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H0?

- ▶ Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy
zerowej o
poprawności przyjętej
formy funkcyjnej

- podważa interpretacje ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)
- niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

Przebudowanie modelu aby uwzględnił nieliniowość relacji między zmiennymi (możliwe, że zmienne modelu powinny być poddane jakiejś transformacji – logarytmowanie, potęgowanie, itp.)

Testowanie normalności składników losowych

- Test Jarque – Berra (Test JB):

$H_0 : \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ - składnik los. ma rozkład normalny

$H_1 : \varepsilon \not\sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ - składnik los. nie ma rozkładu normalnego

Testowanie normalności składników losowych

► Sposób przeprowadzenia testu:

1. estymujemy model: $y_i = x_i\beta + \varepsilon_i$ i uzyskujemy reszty

2. liczymy współczynnik skośności i kurtozę dla rozkładu reszt:

$$\hat{\Theta}_1^\Lambda = \frac{\sum_{i=1}^N e_i^3 / N}{\hat{\sigma}^\Lambda^3}$$

$$\hat{\Theta}_2^\Lambda = \frac{\sum_{i=1}^N e_i^4 / N}{\hat{\sigma}^\Lambda^4}$$

gdzie $\hat{\sigma}^\Lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{N}}$

Testowanie normalności składników losowych

▶ Sposób przeprowadzenia testu:

3. Porównujemy wielkość skośności i kurtozy uzyskanych z rozkładu reszt z oczekiwanymi wielkościami tych statystyk dla rozkładu normalnego :

$$\Theta_1 = 0$$

$$\Theta_2 = 3$$

statystyka testowa: $LM = N \left[\frac{\hat{\Theta}_1}{6} + \frac{(\hat{\Theta}_2 - 3)^2}{24} \right] \xrightarrow{D} \chi^2$

Testowanie normalności składników losowych

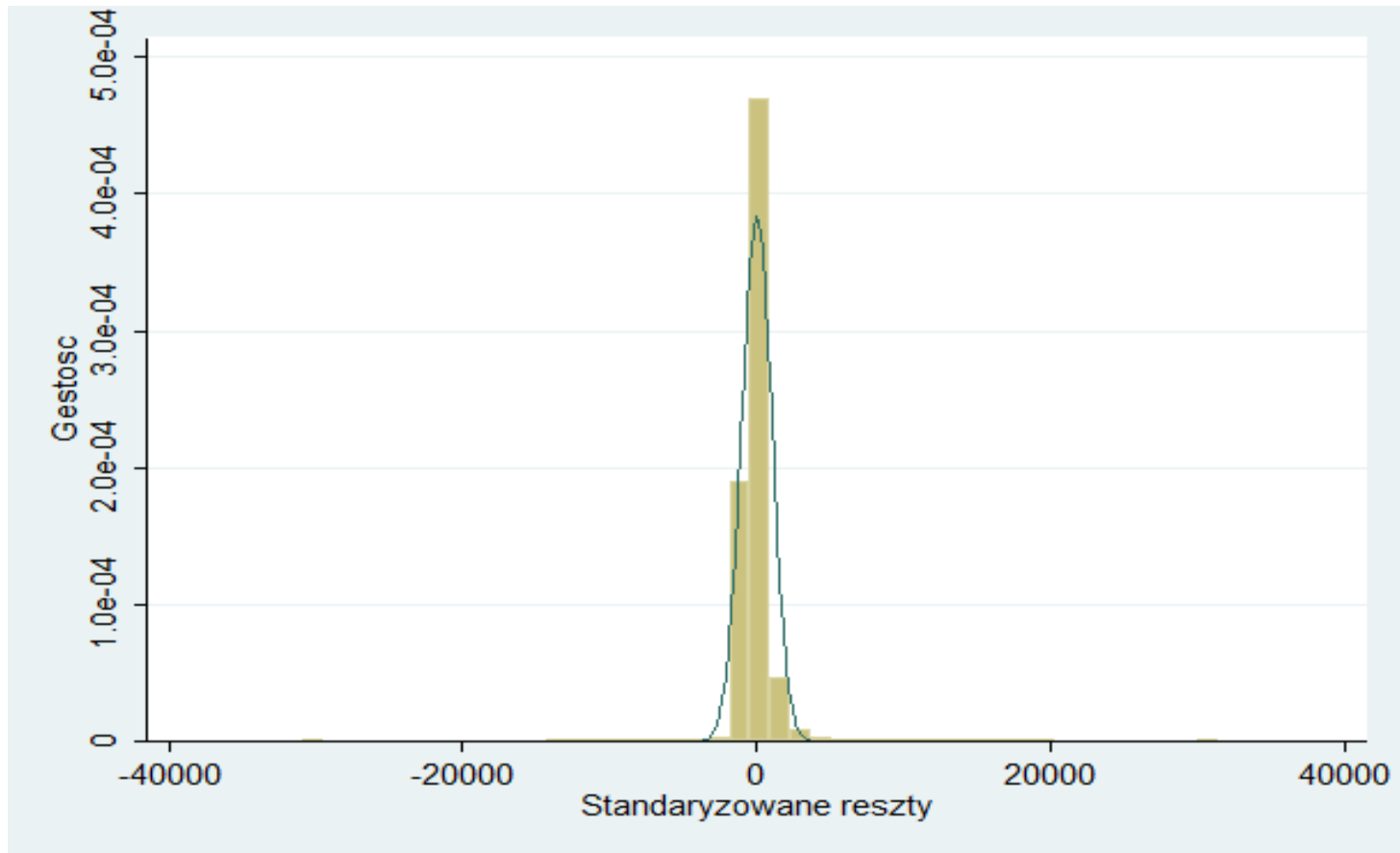
► Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm

Source	SS	df	MS			
Model	2.3693e+10	6	3.9489e+09	Number of obs	=	31705
Residual	3.4278e+10	31698	1081405.34	F(6, 31698)	=	3651.59
Total	5.7971e+10	31704	1828523.21	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.4087
				Adj R-squared	=	0.4086
				Root MSE	=	1039.9

wydg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dochg	.5818533	.0040164	144.87	0.000	.573981	.5897256
_Ik1m_2	-40.65607	23.26644	-1.75	0.081	-86.2592	4.947067
_Ik1m_3	-70.57179	25.89099	-2.73	0.006	-121.3191	-19.82444
_Ik1m_4	-109.2499	20.60656	-5.30	0.000	-149.6395	-68.86021
_Ik1m_5	-153.3497	22.98153	-6.67	0.000	-198.3944	-108.305
_Ik1m_6	-173.5506	18.96167	-9.15	0.000	-210.7162	-136.385
_cons	836.1774	18.74554	44.61	0.000	799.4354	872.9194

Testowanie normalności składników losowych



Testowanie normalności składników losowych

Skewness/Kurtosis tests for Normality

Variable	Obs	Pr(Skewness)	Pr(Kurtosis)	----- joint ----- chi2(2)	Prob>chi2
e	3.2e+04	0.0000	0.0000	34060.88	0.0000

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Niespełnione dodatkowe założenie o tym, że składnik losowy ma rozkład normalny

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

- ▶ **Próba duża:** rozkłady statystyk są bliskie standardowym rozkładom
- ▶ **Mała próba:** jest problemem, gdyż:
 - To założenie jest niezbędne do wyprowadzenie rozkładów statystyk testowych oraz prawidłowego wnioskowania statystycznego.
 - Estymator b uzyskany metoda MNK jest najlepszym estymatorem wśród *liniowych i nieobciążonych* estymatorów \longrightarrow można znaleźć estymator *nieliniowy i nieobciążony* o wariancji mniejszej niż estymator b

Dziękuję za uwagę