

Testowanie hipotez

Testy diagnostyczne

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 10

Plan wykładu

- ▶ 1. Przedziały ufności
- ▶ 2. Testowanie hipotez łącznych
- ▶ 3. Testy diagnostyczne
 - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET

Plan wykładu

- ▶ 1. Przedziały ufności
- ▶ 2. Testowanie hipotez łącznych
- ▶ 3. Testy diagnostyczne
 - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET

Przedziały ufności dla parametrów

- ▶ Jaki jest przedział, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajdzie się nieznaną wartość parametru β_K . Odpowiedź na to pytanie uzyskamy wyznaczając tak zwany przedział ufności.
- ▶ Przedział ufności pozwala na sprawdzenie precyzji oszacowań
- ▶ Przedział ufności dla nieznanego parametru β_K na poziomie ufności $1 - \alpha$ budujemy w oparciu o wzór:

$$\Pr(|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Pr\left(\left|\frac{b_k - \beta_k}{\frac{\Lambda}{se(b_k)}}\right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - 2[1 - F_{t_{N-K}}(t_{1-\frac{\alpha}{2}})] = 1 - \alpha$$

Przedziały ufności dla parametrów

- ▶ Na podstawie ostatniego równania znajdujemy:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}_{t_{N-K}} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

- ▶ Przedział ufności uzyskujemy:

$$\Pr \left(\left| \frac{b_k - \beta_k}{\frac{\Lambda}{se(b_k)}} \right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \Pr(|b_k - \beta_k| < t_{1-\alpha/2} se(b_K)) =$$

$$\Pr(b_K - t_{1-\alpha/2} se(b_K) \leq \beta_K \leq b_K + t_{1-\alpha/2} se(b_K))$$

Przedziały ufności dla parametrów

► Przykład

xi: reg wynagrodzenie i.plec i.wykształcenie godziny wiek szara dorywcza

Source	SS	df	MS	Number of obs =	26352
Model	3.7557e+11	9	4.1730e+10	F(9, 26342) =	66.80
Residual	1.6457e+13	26342	624728699	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.0223
				Adj R-squared =	0.0220
Total	1.6832e+13	26351	638768004	Root MSE =	24995

wynagrodze~e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
_Iplec_1	-1795.469	325.0304	-5.52	0.000	-2432.546 -1158.391
_Iwykształ~2	-4386.364	683.3584	-6.42	0.000	-5725.783 -3046.944
_Iwykształ~3	-5950.806	557.4312	-10.68	0.000	-7043.401 -4858.211
_Iwykształ~4	-8167.496	538.4532	-15.17	0.000	-9222.893 -7112.099
_Iwykształ~5	-9698.71	578.6504	-16.76	0.000	-10832.9 -8564.524
godziny	-.3193543	14.63862	-0.02	0.983	-29.01183 28.37212
wiek	-95.59548	13.53115	-7.06	0.000	-122.1173 -69.0737
_Iszara_1	11363.98	1571.524	7.23	0.000	8283.71 14444.25
dorywcza	-8008.054	742.8795	-10.78	0.000	-9464.138 -6551.97
_cons	18979.6	974.8196	19.47	0.000	17068.9 20890.3

Przedziały ufności dla parametrów

- ▶ Przedział ufności dla wieku przy $\alpha = 0,05$

$$\Pr(b_K - t_{1-\alpha/2} \overset{\wedge}{se}(b_K) \leq \beta_K \leq b_K + t_{1-\alpha/2} \overset{\wedge}{se}(b_K))$$

$$t_{1-\alpha/2} = F_{t_{26342}}^{-1}(0,975) \approx 1,95$$

- ▶ $-95,59 - 13,53 * 1,95 \approx -121,97$
- ▶ $-95,59 + 13,53 * 1,95 \approx -69,20$

Plan wykładu

- ▶ 1. Przedziały ufności
- ▶ 2. Testowanie hipotez łącznych
- ▶ 3. Testy diagnostyczne
 - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ Hipoteza łączna:

$$H_0: H\beta = h$$

- ▶ Jest to układ g równań liniowych
- ▶ Macierz H ma pełen rząd wierszowy równy g (liczba ograniczeń)
- ▶ Poszczególne równania powinny być liniowo niezależne
- ▶ Układ równań nie powinien być sprzeczny

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ Przykład – model:

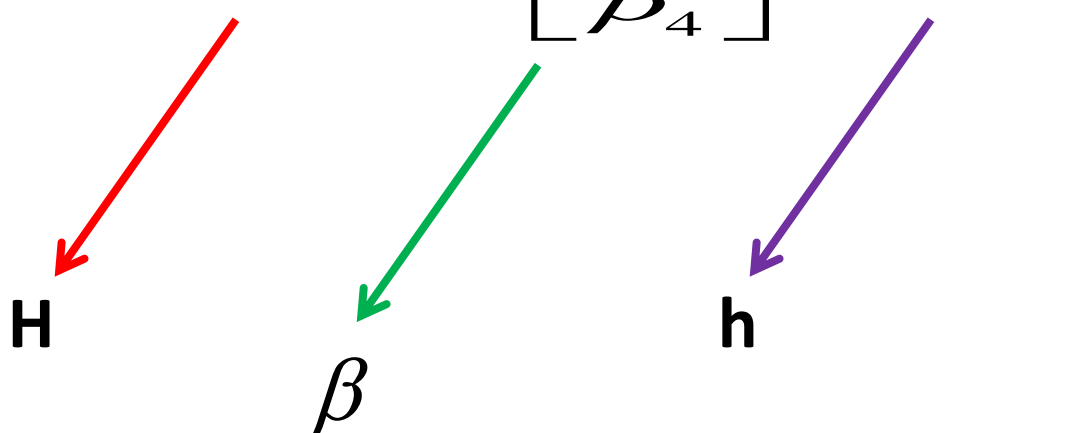
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \varepsilon_i$$

Testujemy hipotezę:

$$H_0: \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = \beta_4 \end{cases}$$

Testowanie hipotez złożonych

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



H β **h**

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ Testowanie hipotez prostych nie jest równoważne testowaniu hipotezy łącznej, że wszystkie rozważane hipotezy proste są łącznie prawdziwe

Testowanie hipotez złożonych

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

- ▶ **Krok 1.** Stawiamy przykładową hipotezę zerową H_0 :

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

- ▶ Brak podstaw do odrzucenia tej hipotezy oznacza, że zmienne x_{2i}, x_{3i} są łącznie nieistotne

- ▶ **Model bez ograniczeń** $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$
- ▶ **Model z ograniczeniami** $y_i = \beta_1 + \beta_4 x_{4i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ **Krok 2.** Przy założeniu, że postawiona hipoteza zerowa jest prawdziwa, wyznaczamy statystykę testową z rozkładu F :

$$F = \frac{(\mathbf{e}'_R \mathbf{e}_R - \mathbf{e}'\mathbf{e}) / g}{\mathbf{e}'\mathbf{e} / (N - K)} = \frac{(R^2 - R_R^2) / g}{(1 - R^2) / (N - K)}$$

- ▶ Gdzie:
- ▶ $R^2, \mathbf{e}'\mathbf{e}$ oznaczają współczynnik determinacji i sumę kwadratów reszt dla modelu bez ograniczeń
- ▶ $R^2_R, \mathbf{e}'_R \mathbf{e}_R$ to te same wielkości, ale dla modelu z ograniczeniami,
- ▶ g oznacza liczbę ograniczeń,
- ▶ K – ilość szacowanych parametrów w modelu bez ograniczeń,
- ▶ N – liczba obserwacji

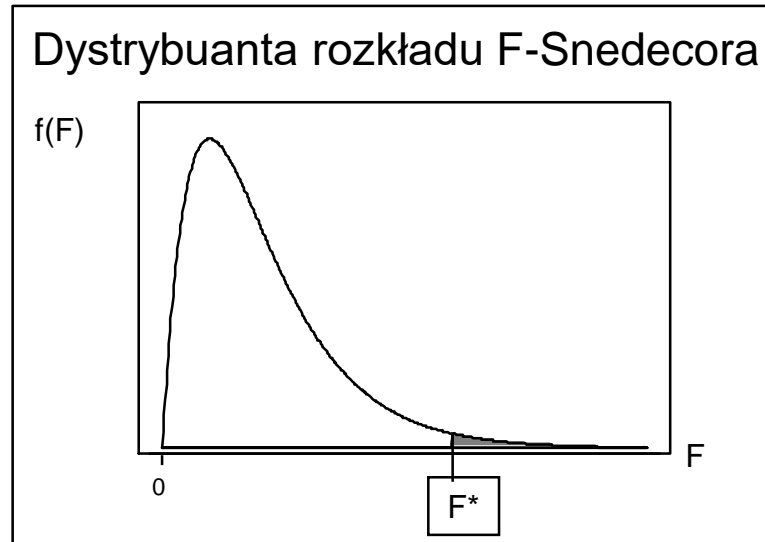
Testowanie hipotez złożonych

- ▶ **Krok 3.** Odczytujemy z tablic rozkładu F wartość krytyczną (α - poziom istotności)

$$F^* = F(g, n - K)$$

Testowanie hipotez złożonych

- ▶ **Krok 4.** Podjęcie decyzji



- ▶ $F \geq F^*$ - odrzucamy hipotezę
- ▶ $F < F^*$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Testowanie hipotez złożonych

► Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm (model bez ograniczeń)

Source	SS	df	MS	
Model	2.3693e+10	6	3.9489e+09	Number of obs = 31705
Residual	3.4278e+10	31698	1081405.34	F(6, 31698) = 3651.59
				Prob > F = 0.0000
				R-squared = 0.4087
				Adj R-squared = 0.4086
				Root MSE = 1039.9
Total	5.7971e+10	31704	1828523.21	

wydg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dochg	.5818533	.0040164	144.87	0.000	.573981	.5897256
_Ik1m_2	-40.65607	23.26644	-1.75	0.081	-86.2592	4.947067
_Ik1m_3	-70.57179	25.89099	-2.73	0.006	-121.3191	-19.82444
_Ik1m_4	-109.2499	20.60656	-5.30	0.000	-149.6395	-68.86021
_Ik1m_5	-153.3497	22.98153	-6.67	0.000	-198.3944	-108.305
_Ik1m_6	-173.5506	18.96167	-9.15	0.000	-210.7162	-136.385
_cons	836.1774	18.74554	44.61	0.000	799.4354	872.9194

Testowanie hipotez złożonych

▶ Przykład

xi: reg wydg dochg (model z ograniczeniami)

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	31705
Model	2.3571e+10	1	2.3571e+10	F(1, 31703)	=	21722.15
Residual	3.4401e+10	31703	1085097.53	Prob > F	=	0.0000
				R-squared	=	0.4066
				Adj R-squared	=	0.4066
Total	5.7971e+10	31704	1828523.21	Root MSE	=	1041.7

wydg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dochg	.5874177	.0039856	147.38	0.000	.5796057	.5952296
_cons	714.5099	10.00872	71.39	0.000	694.8924	734.1274

Testowanie hipotez złożonych

$$F = \frac{(\mathbf{e}'_R \mathbf{e}_R - \mathbf{e}'\mathbf{e}) / g}{\mathbf{e}'\mathbf{e} / (N - K)} = \frac{(3,4401e+10 - 3,4278e+10) / 5}{(3,4278e+10) / (31705 - 7)} \approx 22,65$$

Testowanie hipotez złożonych

```
test _Iklm_2 _Iklm_3 _Iklm_4 _Iklm_5 _Iklm_6
```

```
( 1)  _Iklm_2 = 0
```

```
( 2)  _Iklm_3 = 0
```

```
( 3)  _Iklm_4 = 0
```

```
( 4)  _Iklm_5 = 0
```

```
( 5)  _Iklm_6 = 0
```

```
F( 5, 31698) = 22.65
```

```
Prob > F = 0.0000
```

Plan wykładu

- ▶ 1. Przedziały ufności
- ▶ 2. Testowanie hipotez łącznych
- ▶ 3. Testy diagnostyczne
 - Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej: test RESET

Testy diagnostyczne

- ▶ Służą do weryfikacji założeń KMRL
- ▶ Sprawdzenie założeń KMRL jest ważne \longrightarrow na nich opierają się własności estymatorów MNK
- ▶ Jeśli któreś z założeń nie jest spełnione \longrightarrow należy zastanowić się nad przeformułowaniem modelu lub zastosować bardziej zaawansowane narzędzia ekonometryczne
- ▶ Testy są stosowane po wyestymowaniu modelu

Testy diagnostyczne

- ▶ W praktyce do testowania jednego założenia KMRL używa się często kilku testów
- ▶ Czasami różne testy zastosowane do testowania tej samej hipotezy zerowej dają sprzeczne wnioski

Testy diagnostyczne

▶ Dla każdego testu:

1. Nazwa testu
2. Hipotezy
3. Jakie założenie KMRL nie jest spełnione w przypadku odrzucenia H_0 ?
4. Jakie są konsekwencje niespełnienia założenia KMRL?
5. W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- Test RESET (*Regression Specification Error Test*):

$$H_0 : y_i = x_i \beta + \varepsilon_i \quad - \text{liniowa postać modelu}$$

$$H_1 : y_i = f(x_i \beta) + \varepsilon_i \quad - \text{nieliniowa postać modelu}$$

gdzie $f(\bullet)$ jest nieliniowa

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

▶ Sposób przeprowadzenia testu:

1. estymujemy model: $y_i = x_i\beta + \varepsilon_i$

2. uzyskujemy wartości dopasowane $\hat{y} = x_i\hat{b}$

3. przeprowadzamy regresję pomocniczą:

$$y_i = x_i\beta + \alpha_1 y_i + \dots + \alpha_p y_i + u_i$$

4. za pomocą testu F testujemy H_0 :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- ▶ W dużych próbach rozkład statystyki będzie dążył do rozkładu F-Snedecora o p i $N-K-p$ stopniach swobody

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

► Przykład

xi: reg wydg dochg i.klm

Source	SS	df	MS	
Model	2.3693e+10	6	3.9489e+09	Number of obs = 31705
Residual	3.4278e+10	31698	1081405.34	F(6, 31698) = 3651.59
Total	5.7971e+10	31704	1828523.21	Prob > F = 0.0000

R-squared = 0.4087
Adj R-squared = 0.4086
Root MSE = 1039.9

wydg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dochg	.5818533	.0040164	144.87	0.000	.573981	.5897256
_Ik1m_2	-40.65607	23.26644	-1.75	0.081	-86.2592	4.947067
_Ik1m_3	-70.57179	25.89099	-2.73	0.006	-121.3191	-19.82444
_Ik1m_4	-109.2499	20.60656	-5.30	0.000	-149.6395	-68.86021
_Ik1m_5	-153.3497	22.98153	-6.67	0.000	-198.3944	-108.305
_Ik1m_6	-173.5506	18.96167	-9.15	0.000	-210.7162	-136.385
_cons	836.1774	18.74554	44.61	0.000	799.4354	872.9194

Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

Ramsey RESET test using powers of the fitted values of `wydg`

Ho: model has no omitted variables

F(3, 31695) = 907.11

Prob > F = 0.0000

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy
zerowej o
poprawności przyjętej
formy funkcyjnej

- podważa interpretacje ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)
- niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

Przebudowanie modelu aby uwzględnić nieliniowość relacji między zmiennymi:

- a) możliwe, że zmienne modelu powinny być poddane jakiejś transformacji – logarytmowanie, potęgowanie, itp.
- b) użycie interakcje między zmiennymi;
- c) zastosowanie modelu wielomianowego, modelu schodkowego lub modelu krzywej łamanej

Pytania teoretyczne

1. Mając oszacowanie b_k oraz oszacowanie odchylenia standardowego tego oszacowania $se(b_k)$ wyjaśnić, w jaki sposób należy zbudować przedział ufności dla parametru β_k . Ilość obserwacji wynosi N , ilość szacowanych parametrów K , a poziom ufności $1 - \alpha$.
2. Jak należy testować hipotezę postaci: $H_0: H\beta = h$, używając do tego sumy kwadratów reszt z modelu bez ograniczeń i z ograniczeniami?
3. Wyjaśnić, jakie korzyści i niebezpieczeństwa łączą się z narzucaniem ograniczeń na model.

Pytania teoretyczne

4. Do czego służą testy diagnostyczne?
5. Za pomocą jakiego testu testujemy prawidłowość formy funkcyjnej? Jakiemu założeniu KMRL odpowiada H_0 w tym teście? Jaka jest hipoteza alternatywna w tym teście?

Dziękuję za uwagę