Testowanie hipotez

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Wykład 10

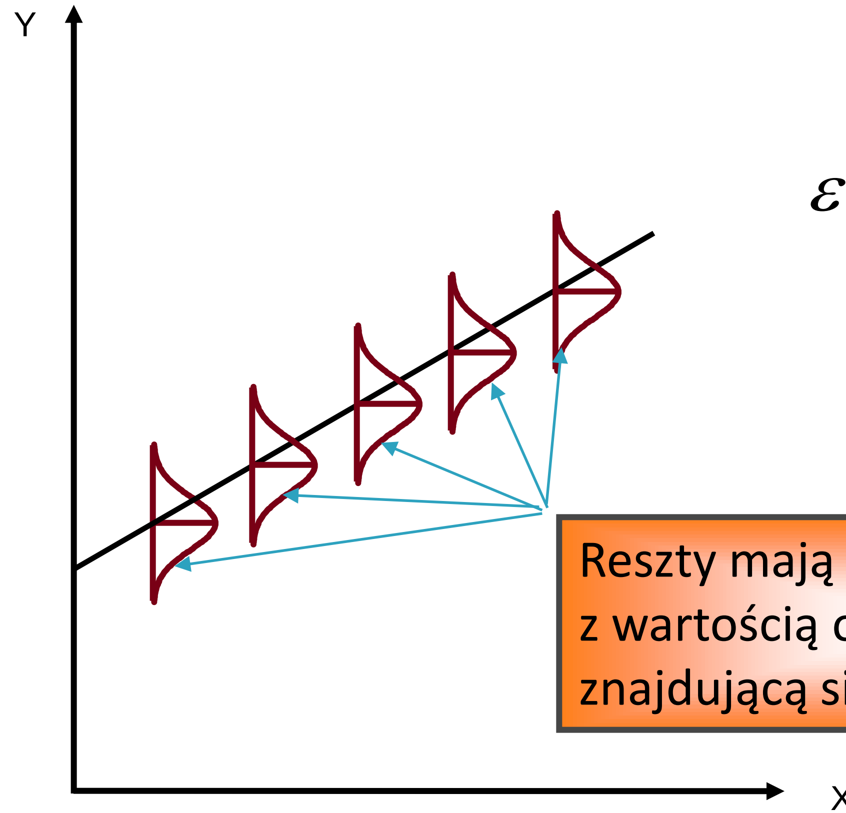
Plan wykładu

- 1. Testowanie hipotez prostych
  - Rozkład estymatora **b**
  - Testowanie hipotez prostych przy użyciu statystyki t
  - Przedziały ufności

Testowanie hipotez

- Badamy czy hipotezy teoretyczne (wynikające z teorii) znajdują potwierdzenie w danych
- Hipotezy narzucają pewne ograniczenia na wartości parametrów
- Oszacowania parametrów powinny spełniać te ograniczenia w przybliżeniu
- Jeśli oszacowania parametrów odbiegają od postulowanych związków wynikających z teorii to odrzucamy hipotezę jako sprzeczną z danymi
- Uwzględnienie w modelu wiedzy z hipotezy prawdziwej poprawia precyzję oszacowań
- Uwzględnienie w modelu wiedzy z hipotezy fałszywej prowadzi do obciążenia estymatora
- Do testowania hipotez wykorzystujemy testy statystyczne

Dodatkowo założenie klasycznego modelu regresji liniowej



$$\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

Reszty mają **rozkład normalny** z wartością oczekiwaną znajdującą się na linii regresji.

Testowanie hipotez prostych

- Rozkład estymatora **b:**

$$b \sim N(\beta, \sigma^2 (X^{'} X)^{-1})$$

- Rozkład pojedynczego elementu tego wektora b_k :

$$b_k \sim N(\beta_k, [\Sigma_b]_{kk})$$

Testowanie hipotez prostych

- Korzystając z rozkładu b_k:

$$\frac{b_k - \beta_k}{\sqrt{[\Sigma_b]_{kk}}} = \frac{b_k - \beta_k}{se(b_k)} \sim N(0,1)$$

- Tej statystyki nie da się policzyć ponieważ macierz Σ_b jest nieznana
- Oszacowaniem tej macierzy jest $\hat{\Sigma}_b$ ale zastosowanie jej w powyższym wzorze wpłynie na rozkład statystyki
- Tak zmodyfikowana statystyka (będziemy ją nazywać **t**) będzie miała rozkład t-studenta

Testowanie hipotez prostych

- Hipoteza prosta: dotyczy pojedynczego parametru modelu albo kombinacji liniowej parametrów

- Załóżmy, że H0: $\beta_k = \beta_k^*$, spełnione są założenia KMRL i H0 jest prawdziwa, wtedy

$$t = \frac{b_k - \beta_k^*}{\hat{se}(b_k)} \sim t_{N-K}$$

Testowanie hipotez prostych

- Najczęściej testujemy H0: $\beta_k = \beta_k^{*}$ przy hipotezie alternatywnej H1: $\beta_k \neq \beta_k^{*}$ stosując dwustronny obszar krytyczny

- Możliwe także jest testowanie H0: $\beta_k = \beta_k^{*}$ przy hipotezie alternatywnej H1: $\beta_k > \beta_k^{*}$ lub H1: $\beta_k < \beta_k^{*}$ używając jednostronnych obszarów krytycznych

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- Testowanie prostych hipotez przebiega w następujących krokach:
- Dla modelu:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_K X_{Ki} + \varepsilon_i$$

- którego oszacowaniem jest:

$$\hat{y}_i = b_1 + b_2 X_{2i} + \ldots + b_K X_{Ki}$$

- Krok 1. Stawiamy tak zwaną hipotezę zerową co do wartości nieznanego parametru β_K

$$H_0 : \beta_K = 0 \quad \text{(zmienna } \mathrm{X_{Ki}} \text{ jest nieistotna)}$$

- Hipotezie tej towarzyszy hipoteza alternatywna:

$$H_1 : \beta_K \neq 0 \quad \text{(zmienna } \mathrm{X_{Ki}} \text{ jest istotna)}$$

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

Krok 2. Przy założeniu, że postawiona hipoteza zerowa jest prawdziwa, wyznaczamy statystykę testową z rozkładu *t - Studenta* o N - K stopniach swobody postaci:

$$t = \frac{b_K}{\overset{\wedge}{se}(b_K)}$$

Gdzie:

$\overset{\wedge}{se}(b_K)$ - odchylenie standardowe estymatora b_K

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

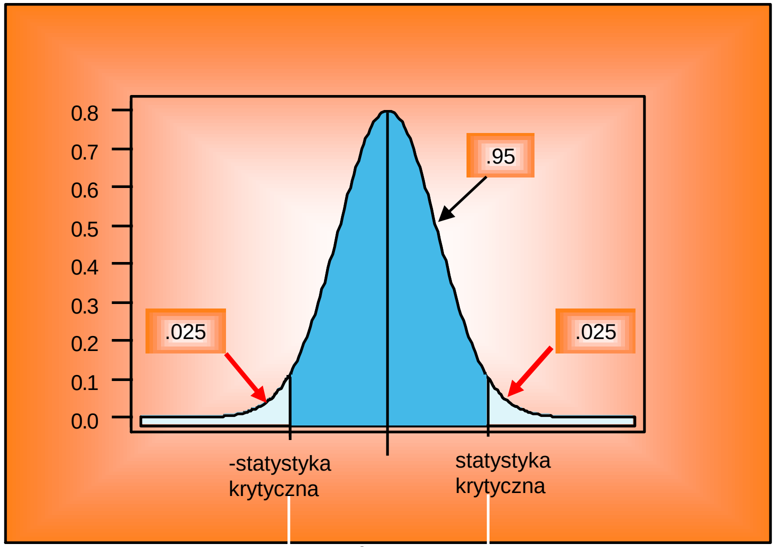
Krok 3. Odczytujemy z tablic rozkładu *t-Studenta* wartość krytyczną (α - poziom istotności[1)])

$$t^* = t\left(\underbrace{N-K}_{\text{Stopni swobody}};\underbrace{1-\frac{\alpha}{2}}_{\text{Rząd kwantyla}}\right)$$

[1)] *maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu polegającego na odrzuceniu prawdziwej hipotezy zerowej*

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

Krok 4. Podjęcie decyzji



Obszar Odrzucenia | Obszar Nieodrzucenia | Obszar Odrzucenia

- ✓ | t |≥ t * - odrzucamy hipotezę zerową, czyli zmienna X_{Ki} jest istotna.
- ✓ | t |< t * - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, czyli zmienna X_{Ki} jest nieistotna.

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- Przykład

xi: reg wynagrodzenie i.plec i.wykształcenie godziny wiek szara dorywcza

Source	SS	df	MS
Model	3.7557e+11	9	4.1730e+10
Residual	1.6457e+13	26342	624728699
Total	1.6832e+13	26351	638768004

Number of obs	= 26352
F(9, 26342)	= 66.80
Prob > F	= 0.0000
R-squared	= 0.0223
Adj R-squared	= 0.0220
Root MSE	= 24995

wynagrodze~e	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
_Iplec_1	-1795.469	325.0304	-5.52	0.000	-2432.546	-1158.391
_Iwykształ~2	-4386.364	683.3584	-6.42	0.000	-5725.783	-3046.944
_Iwykształ~3	-5950.806	557.4312	-10.68	0.000	-7043.401	-4858.211
_Iwykształ~4	-8167.496	538.4532	-15.17	0.000	-9222.893	-7112.099
_Iwykształ~5	-9698.71	578.6504	-16.76	0.000	-10832.9	-8564.524
godziny	-.3193543	14.63862	-0.02	0.983	-29.01183	28.37312
wiek	-95.59548	13.53115	-7.06	0.000	-122.1173	-69.0737
_Iszara_1	11363.98	1571.524	7.23	0.000	8283.71	14444.25
dorywcza	-8008.054	742.8795	-10.78	0.000	-9464.138	-6551.97
_cons	18979.6	974.8196	19.47	0.000	17068.9	20890.3

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- W popularnych pakietach ekonometrycznych obok wyliczonej wartości statystyki **t** podawane jest również odpowiadające mu p**rawdopodobieństwo p** , że $\beta_k = 0$. Oznaczane ono jest z angielskiego przez $p-value$.
- W przypadku hipotez dwustronnych:

$$p = 2[1 - F(k^*)]$$

gdzie: F- dystrybuanta rozkładu, k* - wartość statystyki testowej

- W przypadku hipotez jednostronnych:

$$p = 1 - F(k^*)$$

gdzie: F- dystrybuanta rozkładu, k* - wartość statystyki testowej

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- Jeśli p-value < α (poziomu istotności), to odrzucamy hipotezę zerową.
- Jeśli p-value > α (poziomu istotności), to brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Testowanie istotności poszczególnych zmiennych

- Przykład

xi: reg wynagrodzenie i.plec i.wyksztalcenie godziny wiek szara dorywcza

Source	SS	df	MS
Model	3.7557e+11	9	4.1730e+10
Residual	1.6457e+13	26342	624728699
Total	1.6832e+13	26351	638768004

Number of obs =	26352
F(9, 26342) =	66.80
Prob > F =	0.0000
R-squared =	0.0223
Adj R-squared =	0.0220
Root MSE =	24995

wynagrodze~e	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
_Iplec_1	-1795.469	325.0304	-5.52	0.000	-2432.546	-1158.391
_Iwykszta l~2	-4386.364	683.3584	-6.42	0.000	-5725.783	-3046.944
_Iwykszta l~3	-5950.806	557.4312	-10.68	0.000	-7043.401	-4858.211
_Iwykszta l~4	-8167.496	538.4532	-15.17	0.000	-9222.893	-7112.099
_Iwykszta l~5	-9698.71	578.6504	-16.76	0.000	-10832.9	-8564.524
godziny	-.3193543	14.63862	-0.02	0.983	-29.01183	28.37312
wiek	-95.59548	13.53115	-7.06	0.000	-122.1173	-69.0737
_Iszara_1	11363.98	1571.524	7.23	0.000	8283.71	14444.25
dorywcza	-8008.054	742.8795	-10.78	0.000	-9464.138	-6551.97
_cons	18979.6	974.8196	19.47	0.000	17068.9	20890.3

Przedziały ufności dla parametrów

- Jaki jest przedział, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajdzie się nieznana wartość parametru β_K . Odpowiedź na to pytanie uzyskamy wyznaczając tak zwany przedział ufności.
- Przedział ufności pozwala na sprawdzenie precyzji oszacowań

- Przedział ufności dla nieznanego parametru β_K na poziomie ufności 1– α budujemy w oparciu o wzór:

$$\Pr(|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Pr\left(\left| \frac{b_k - \beta_k}{\overset{\Lambda}{se}(b_k)} \right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - 2[1 - F_{t_{N-K}}(t_{1-\frac{\alpha}{2}})] = 1 - \alpha$$

Przedziały ufności dla parametrów

- Na podstawie ostatniego równania znajdujemy:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}{}_{t_{N-K}}(1-\frac{\alpha}{2})$$

- Przedział ufności uzyskujemy:

$$\Pr\left(\left|\frac{b_k-\beta_k}{\overset{\Lambda}{se}(b_k)}\right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \Pr(|b_k-\beta_k| < t_{1-\alpha/2}\, se(\overset{\Lambda}{b}_K)) =$$

$$\Pr(b_K - t_{1-\alpha/2}\, se(\overset{\Lambda}{b}_K) \le \beta_K \le b_K + t_{1-\alpha/2}\, se(\overset{\Lambda}{b}_K))$$

Przedziały ufności dla parametrów

- Przykład

xi: reg wynagrodzenie i.plec i.wyksztalcenie godziny wiek szara dorywcza

Source	SS	df	MS
Model	3.7557e+11	9	4.1730e+10
Residual	1.6457e+13	26342	624728699
Total	1.6832e+13	26351	638768004

Number of obs =	26352
F(9, 26342) =	66.80
Prob > F =	0.0000
R-squared =	0.0223
Adj R-squared =	0.0220
Root MSE =	24995

wynagrodze~e	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
_Iplec_1	-1795.469	325.0304	-5.52	0.000	-2432.546	-1158.391
_Iwykształ~2	-4386.364	683.3584	-6.42	0.000	-5725.783	-3046.944
_Iwykształ~3	-5950.806	557.4312	-10.68	0.000	-7043.401	-4858.211
_Iwykształ~4	-8167.496	538.4532	-15.17	0.000	-9222.893	-7112.099
_Iwykształ~5	-9698.71	578.6504	-16.76	0.000	-10832.9	-8564.524
godziny	-.3193543	14.63862	-0.02	0.983	-29.01183	28.37312
wiek	-95.59548	13.53115	-7.06	0.000	-122.1173	-69.0737
_Iszara_1	11363.98	1571.524	7.23	0.000	8283.71	14444.25
dorywcza	-8008.054	742.8795	-10.78	0.000	-9464.138	-6551.97
_cons	18979.6	974.8196	19.47	0.000	17068.9	20890.3

Przedziały ufności dla parametrów

- Przedział ufności dla wieku przy $\alpha = 0,05$

$$\Pr(b_K - t_{1-\alpha/2}\, \overset{\Lambda}{se}(b_K) \le \beta_K \le b_K + t_{1-\alpha/2}\, \overset{\Lambda}{se}(b_K))$$

$$t_{1-\alpha/2} = F^{-1}{}_{t_{26342}}(0,975) \sim 1,95$$

- -95,59- 13,53*1,95 $\sim$ -121,97
- -95,59+ 13,53*1,95 $\sim$ -69,20

Dziękuję za uwagę