

Kointegracja, mechanizm korekty błędem

Stanisław Cichocki
Natalia Nehrebecka

Wykład 6

Plan wykładu

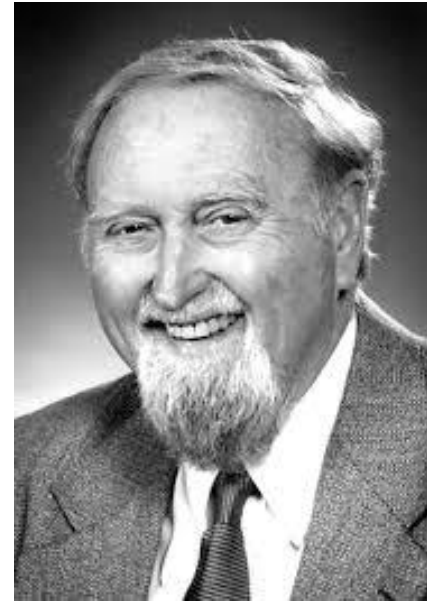
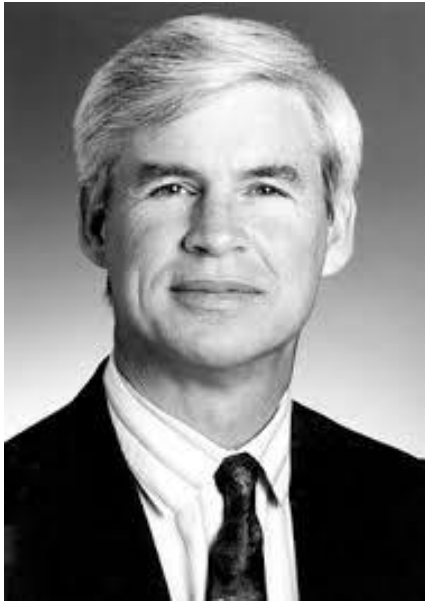
- ▶ 1. Kointegracja
- ▶ 2. Mechanizm korekty błędem

Plan wykładu

- ▶ 1. Kointegracja
- ▶ 2. Mechanizm korekty błędem

Kointegracja

- ▶ Sztokholm, 10 grudnia 2003



Who's that and what's going on?

Kointegracja

- ▶ Sztokholm, 10 grudnia 2003

<http://www.nobelprize.org/mediaplayer/index.php?id=996>

Przypomnienie: regresja pozorna

- ▶ Generujemy obserwacje dwóch niezależnych zmiennych niestacjonarnych:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

gdzie: ε_t , u_t są białym szumem

Przypomnienie: regresja pozorna

Source	SS	df	MS	Number of obs = 1000000		
Model	1.2699e+11	1	1.2699e+11	F(1,999998) =	.	
Residual	7.3603e+10	999998	73602.6615	Prob > F =	0.0000	
Total	2.0059e+11	999999	200593.883	R-squared =	0.6331	
				Adj R-squared =	0.6331	
				Root MSE =	271.3	

y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
x	-1.072581	.0008166	-1313.53	0.000	-1.074182	-1.070981
_cons	264.1878	.3674638	718.95	0.000	263.4676	264.908

Durbin-Watson d-statistic(2, 1000000) = .0000293

Przypomnienie: regresja pozornia

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags (p)	chi2	df	Prob > chi2
1	999969.782	1	0.0000
2	999969.782	2	0.0000
3	999969.782	3	0.0000
4	999969.783	4	0.0000

H0: no serial correlation

Przypomnienie: regresja pozorna

Source	SS	df	MS	Number of obs = 999999		
Model	2.26050612	1	2.26050612	F(1,999997)	=	2.26
Residual	999321.194999997	.999324192		Prob > F	=	0.1326
Total	999323.455999998	.999325453		R-squared	=	0.0000
				Adj R-squared	=	0.0000
				Root MSE	=	.99966

D.y	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
x						
D1.	.0015026	.0009991	1.50	0.133	-.0004555	.0034608
_cons	.0002	.0009997	0.20	0.841	-.0017593	.0021593

Durbin-Watson d-statistic(2, 999999) = 2.000529

Przypomnienie: regresja pozornia

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags (p)	chi2	df	Prob > chi2
1	0.070	1	0.7911
2	0.081	2	0.9601
3	4.919	3	0.1778
4	4.992	4	0.2882

H0: no serial correlation

Kointegracja

- ▶ Rozwiązaniem problemu regresji pozornej może być różnicowanie, ale powoduje to utratę wielu informacji, w tym o zależnościach długookresowych.

Kointegracja

- ▶ Otrzymano następujące oszacowania modelu ARIMA(p,d,q):

$$\Delta y_t = \mu + 0,2\Delta y_{t-1} + 0,4\Delta y_{t-2} + \varepsilon_t + 0,2\varepsilon_{t-1}$$

- ▶ Czemu jest równy stan równowagi długookresowej w tym modelu?

Kointegracja

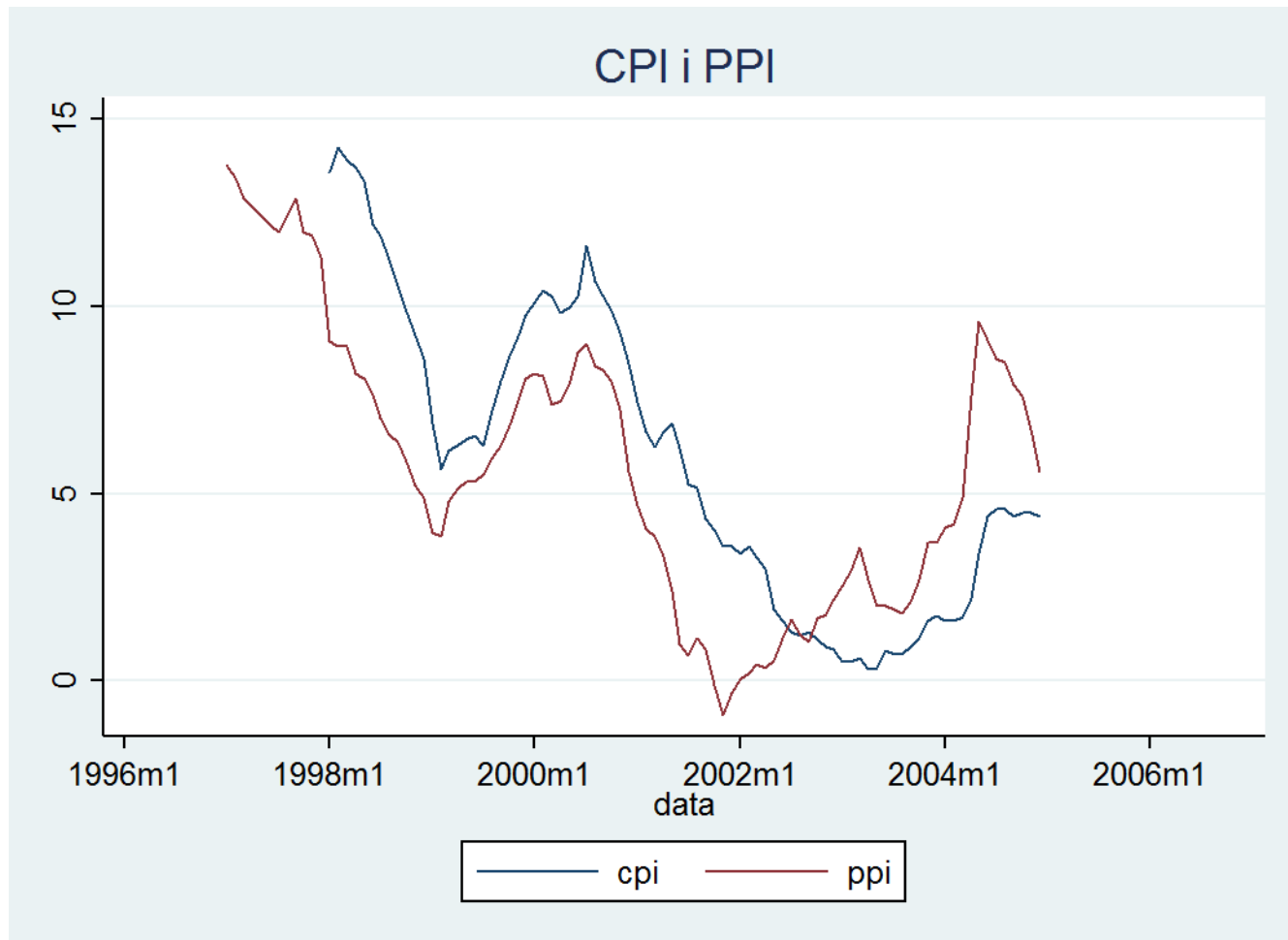
- ▶ Stan równowagi długookresowej:

$$y^* = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p})$$

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = \dots = E(\varepsilon_{t-q}) = 0$$

$$E(y_t - y_{t-1}) = \mu + 0,2E(y_{t-1} - y_{t-2}) + 0,4E(y_{t-2} - y_{t-3}) + E\varepsilon_t + 0,2E\varepsilon_{t-1}$$

Kointegracja



Kointegracja

- ▶ Zmienne CPI i PPI są niestacjonarne.
- ▶ Jednocześnie wykazują wyraźną zależność długookresową – szeregi dryfują razem.
- ▶ Po zróżnicowaniu zależność ta może nie zostać uchwycona.

Kointegracja

- ▶ Rozwiązanie problemu: kointegracja.
- ▶ Kointegracja to długookresowy związek między dwiema (lub większą liczbą) niestacjonarnych zmiennych (zintegrowanych tego samego stopnia).
- ▶ Odchylenia od tego długookresowego związku są stacjonarne.

Kointegracja

- ▶ O wektorze $[y_t, x_t]$, którego każdy element jest $I(1)$, mówimy, że jest skointegrowany, jeśli istnieje wektor β , że:

$$y_t - \beta x_t \sim I(0)$$

- ▶ Wektorem kointegrującym nazywamy współczynniki w kombinacji liniowej, która sprowadza wektor zmiennych losowych do stacjonarności.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$$

Plan wykładu

- ▶ 1. Kointegracja
- ▶ 2. Mechanizm korekty błędem

Mechanizm korekty błędem

- ▶ Twierdzenie Grangera: pozwala na powiązanie kointegracji z pojęciem równowagi długookresowej.
- ▶ Twierdzenie Grangera:
Jeśli (y_t, x_t) są skointegrowane, oraz y_t, x_t są $I(1)$ to y_t można przedstawić w postaci Mechanizmu Korekty Błędem (ECM – Error Correction Mechanism)

$$\Delta y_t = \alpha(y_{t-1} - x_{t-1}\beta) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_{t-i} \gamma_i + \varepsilon_t$$

gdzie: $y_{t-1} - x_{t-1}\beta \sim I(0), \varepsilon_t \sim I(0)$

Mechanizm korekty błędem

- ▶ Twierdzenie Grangera umożliwia interpretację wektora kointegrującego jako relacji długookresowej między zmiennymi.

$$y^* = E(y_t) = \dots = E(y_{t-k})$$

$$E(\Delta y_t) = \dots = E(\Delta y_{k-1}) = 0$$

$$x^* = E(x_t) = \dots = E(x_{t-k})$$

$$E(\Delta x_t) = \dots = E(\Delta x_{k-1}) = 0$$

- ▶ A więc z ECM:

$$0 = \alpha(y^* - x^* \beta)$$

Mechanizm korekty błędem

- ▶ Równowaga długookresowa dana jest wzorem:

$$y^* = x^* \beta$$

- ▶ Interpretowana ona jest w kontekście ECM jako relacja między zmiennymi, do której dostosowuje się zmienna y_t .
- ▶ $y_t - x_t \beta$ jest odchyleniem od równowagi długookresowej (błędem).

Mechanizm korekty błędem

$$\Delta y_t = \alpha(y_{t-1} - x_{t-1}\beta) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_{t-i} \gamma_i + \varepsilon_i$$

- ▶ Współczynnik α związany jest więc z szybkością dostosowania y_t do poziomu równowagi (mierzy jaka część różnicy w stosunku do równowagi długookresowej z momentu t-1 jest korygowana w momencie t).
- ▶ Współczynniki θ_i, γ_i związane są z krótkookresową dynamiką zmiennej zależnej.

Mechanizm korekty błędem

- ▶ Dwustopniowa metoda Engla-Grangera służy do badania kointegracji.
- ▶ Uwaga: badanie kointegracji ma sens jedynie wtedy gdy y_t i wszystkie zmienne zawarte w x_t są $I(1)$.
- ▶ Wobec tego pierwszym etapem musi być przetestowanie czy wszystkie analizowane zmienne są $I(1)$.

Mechanizm korekty błędem

- ▶ Drugi etap:
 1. przeprowadzamy regresję

$$y_t = x_t \beta + u_t$$

i otrzymujemy potencjalny wektor kointegrujący:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$$

Mechanizm korekty błędem

- ▶ Drugi etap:

2. testujemy stacjonarność reszt \hat{u}_t za pomocą testu ADF

$$\Delta\hat{u}_t = \rho u_{t-1} + \omega_t$$

- ▶ Hipoteza zerowa: \hat{u}_t jest niestacjonarne – brak kointegracji.

Mechanizm korekty błędem

- ▶ Jeśli reszty są stacjonarne to szacujemy ECM wykorzystując uzyskane na pierwszym etapie oszacowanie $\hat{\beta}$.

$$\Delta y_t = \alpha(y_{t-1} - x_{t-1}\hat{\beta}) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_{t-i} \gamma_i + \epsilon_t$$

- ▶ Liczbę opóźnień k ustalamy tak aby wyeliminować autokorelację reszt.

Mechanizm korekty błędem

Source	SS	df	MS	Number of obs =	84
Model	660.83351	1	660.83351	F(1, 82) =	78.84
Residual	687.325741	82	8.38202123	Prob > F =	0.0000
Total	1348.15925	83	16.2428825	R-squared =	0.4902
				Adj R-squared =	0.4840
				Root MSE =	2.8952

cpi	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
ppi	.9483865	.1068104	8.88	0.000	.7359065 1.160866
_cons	1.351262	.5972153	2.26	0.026	.1632103 2.539313

Mechanizm korekty błędem

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 83

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-3.534	-2.904	-2.587

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.6731

D.reszty	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
reszty						
L1.	-.0273153	.0227429	-1.20	0.233	-.0725664	.0179359
_cons	-.0702811	.0652026	-1.08	0.284	-.2000137	.0594515

Mechanizm korekty błędem

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags (p)	chi2	df	Prob > chi2
1	9.535	1	0.0020
2	10.709	2	0.0047
3	10.731	3	0.0133
4	12.189	4	0.0160

H0: no serial correlation

Mechanizm korekty błędem

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 82

Test Statistic	----- Interpolated Dickey-Fuller -----		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-4.001	-3.535	-2.904

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.005

D.reszty	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
reszty						
L1.	-.0862095	.021514	-4.00	0.000	-.129007	-.043411
LD.	.3492704	.105075	3.32	0.001	.1401238	.558417
_cons	-.052963	.0618066	-0.86	0.394	-.175986	.07006

Mechanizm korekty błędem

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags (p)		chi2	df	Prob > chi2
1		1.900	1	0.1681
2		2.105	2	0.3491
3		2.591	3	0.4591
4		2.832	4	0.5863

H0: no serial correlation

Mechanizm korekty błędem

Source	SS	df	MS			
Model	9.3347911	2	4.66739555	Number of obs =	83	
Residual	15.8081975	80	.197602469	F(2, 80) =	23.62	
Total	25.1429886	82	.306621813	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.3713	
				Adj R-squared =	0.3555	
				Root MSE =	.44452	

D.cpi	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
reszty						
L1.	-.066879	.0177171	-3.77	0.000	-.1021372	-.0316208
ppi						
D1.	.3388519	.0758191	4.47	0.000	.1879672	.4897367
_cons	-.0945384	.0488884	-1.93	0.057	-.1918293	.0027526

Mechanizm korekty błędem

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags (p)		chi2	df	Prob > chi2
1		8.461	1	0.0036
2		8.585	2	0.0137
3		8.743	3	0.0329
4		8.920	4	0.0631

H0: no serial correlation

Mechanizm korekty błędem

Source	SS	df	MS	Number of obs =	82
Model	12.2168005	3	4.07226684	F(3, 78) =	25.84
Residual	12.2937651	78	.157612372	Prob > F =	0.0000
Total	24.5105656	81	.302599575	R-squared =	0.4984
				Adj R-squared =	0.4791
				Root MSE =	.397

D.cpi	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
reszty						
L1.	-0.0490505	.0171352	-2.86	0.005	-.083164	-.0149371
ppi						
D1.	.3166457	.0678827	4.66	0.000	.1815017	.4517897
cpi						
LD.	.3334635	.0860572	3.87	0.000	.1621368	.5047902
_cons	-.0711289	.0449371	-1.58	0.118	-.1605917	.018334

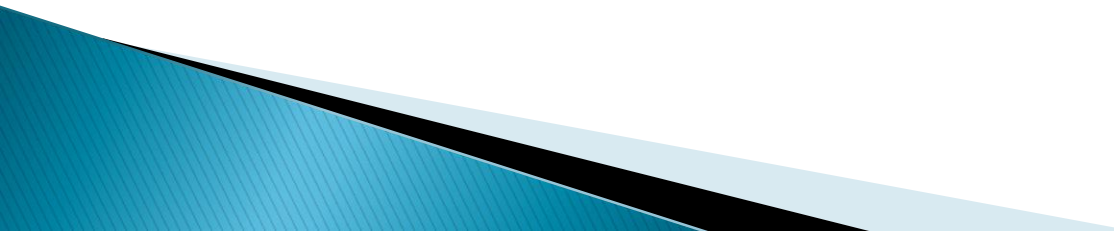
Mechanizm korekty błędem

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags (p)		chi2	df	Prob > chi2
1		1.001	1	0.3170
2		1.012	2	0.6029
3		1.031	3	0.7938
4		1.106	4	0.8933

H0: no serial correlation

Pytania teoretyczne

1. Wyjaśnić jaki jest związek między kointegracją a mechanizmem korekty błędem (ECM).
 2. Podać interpretację poszczególnych współczynników w mechanizmie korekty błędem (ECM).
 3. Opisać metodę testowania kointegracji za pomocą dwustopniowej metody Engla-Grangera.
- 

Dziękuję za uwagę