Binarne zmienne zależne cz. III

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników
2. Liniowy model prawdopodobieństwa
   a) Interpretacja współczynników
3. **Probit**
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka
4. Logit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

Diagnostyka

- **Testy na poprawność formy funkcyjnej**
  - W przypadku modeli z binarną zmienną objaśnianą zastosowanie znajduje $linktest$, który jest uogólnieniem i jednocześnie słabszą wersją testu $RESET$.
  - Test ten polega na przeprowadzeniu modelu probitowego y_i na stałą, $\hat{y}_i^*$ oraz $(\hat{y}_i^*)^2$.
  - Istotny współczynnik przy $(\hat{y}_i^*)^2$ powoduje odrzucenie hipotezy o poprawności formy funkcyjnej modelu.

Diagnostyka

- **Testy na poprawność formy funkcyjnej**

```
Iteration 0:   log likelihood =  -3043.028
Iteration 1:   log likelihood = -2879.6536
Iteration 2:   log likelihood = -2879.0342
Iteration 3:   log likelihood = -2879.0339
Iteration 4:   log likelihood = -2879.0339

Probit regression                                 Number of obs   =       4877
                                                  LR chi2(2)      =     327.99
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -2879.0339                       Pseudo R2       =     0.0539

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        _hat |    1.28044   .1331964     9.61   0.000      1.01938      1.5415
      _hatsq |  -.2822587   .1200489    -2.35   0.019    -.5175501   -.0469672
       _cons |  -.0374954   .0365824    -1.02   0.305    -.1091955    .0342047
------------------------------------------------------------------------------
```

Diagnostyka

- **Test jakości dopasowania (*goodness of fit test*)**
  - *Test jest oparty na spostrzeżeniu, że jeżeli forma funkcyjna jest prawidłowa, to niezależnie od sposobu podziału próby na podpróbki, oszacowania stałych w modelu dla poszczególnych podpróbek nie powinny się istotnie różnić.*
  - Odrzucenie hipotezy zerowej o równości stałej w podpróbkach prowadzi do wniosku o niepoprawnej formie funkcyjnej modelu.
    - **Test Pearsona**
    - Podpróbki zdefiniowane jako wszystkie możliwe kombinacje zmiennych niezależnych. Powinno się go używać, kiedy takich grup (*covariate patterns*) jest znacząco mniej niż badanych obserwacji.
    - **Test Hosmera-Lemenshowa** stosuje się, kiedy liczba *covariate patterns* jest duża. Dzieli on obserwacje na grupy według kwantyli prawdopodobieństwa sukcesu przewidzianego przez model.

Diagnostyka

- **Wersja Pearsona**
- H_0: poprawna forma funkcyjna

```
Probit model for y, goodness-of-fit test

          number of observations =      4877
   number of covariate patterns =      4871
              Pearson chi2(4859) =      4902.61
                     Prob > chi2 =         0.3271
```

- **Wersja Hosmera-Lemeshowa**

```
Probit model for y, goodness-of-fit test

          number of observations =      4877
              number of groups =        10
       Hosmer-Lemeshow chi2(8) =        21.39
                     Prob > chi2 =        0.0062
```

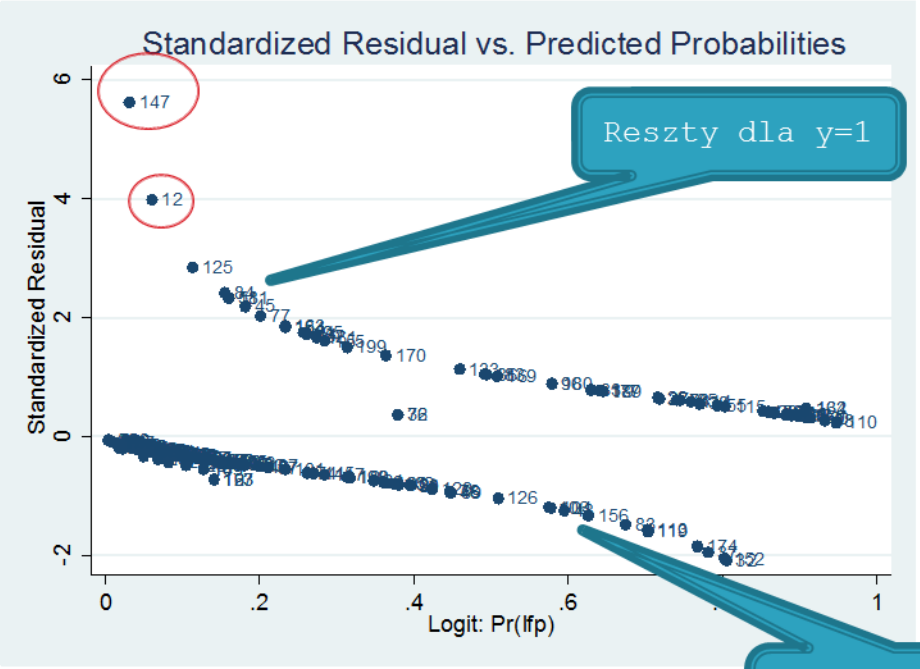
Diagnostyka

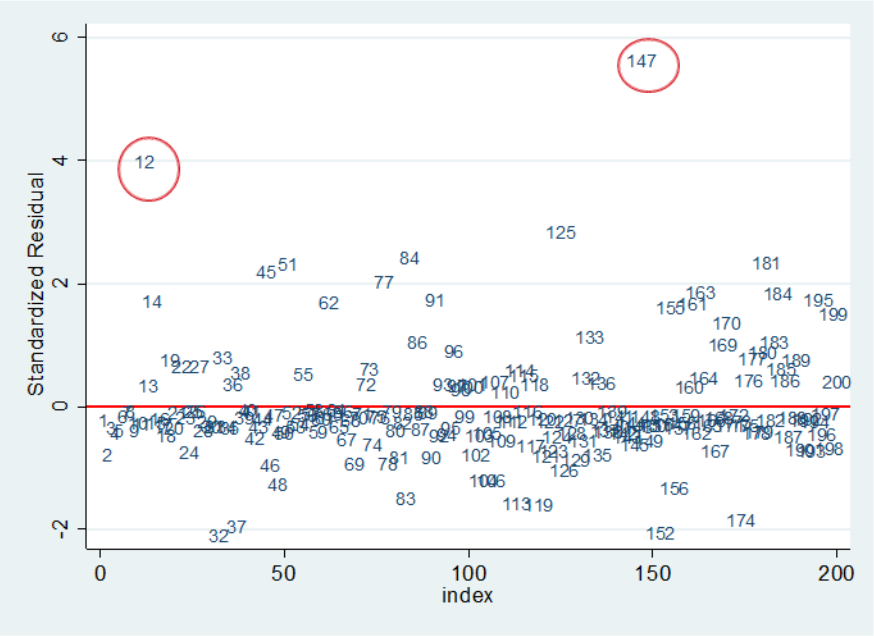
- **Współliniowość**

- $probit\ y\ x$
- $\boldsymbol{collin}$ // variance-inflation-factors

Diagnostyka - wykresy

- Standardized Residual vs. Predicted Probabilities

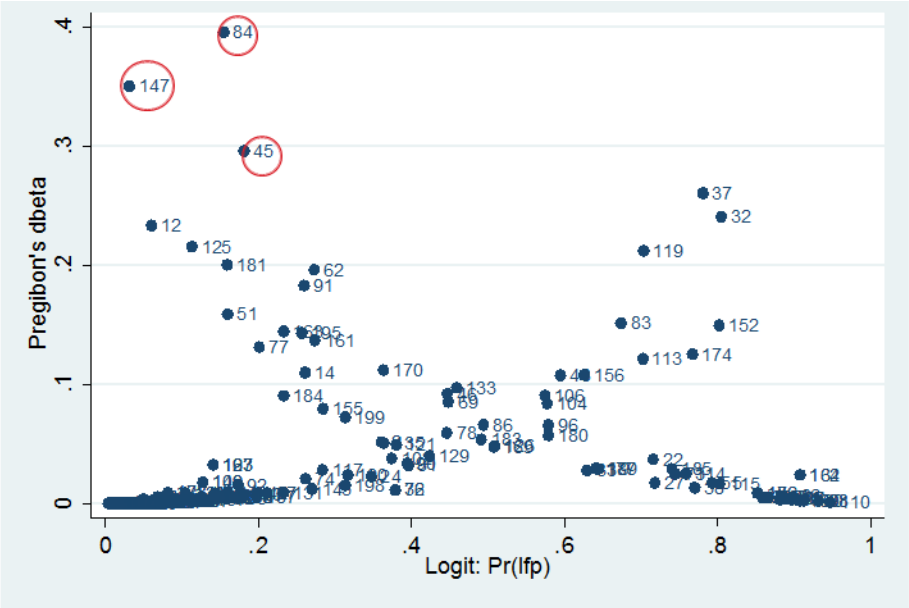


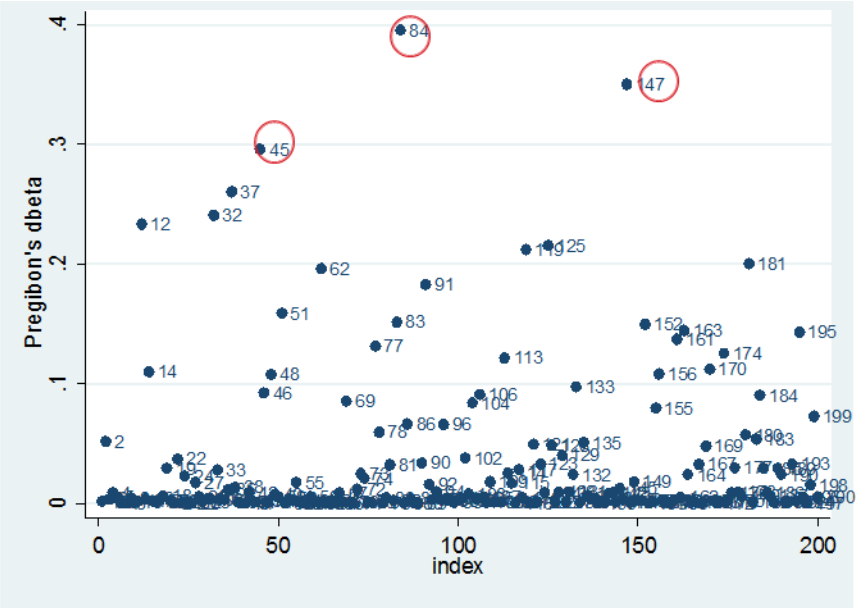


Reszty dla y=0

Diagnostyka - wykresy

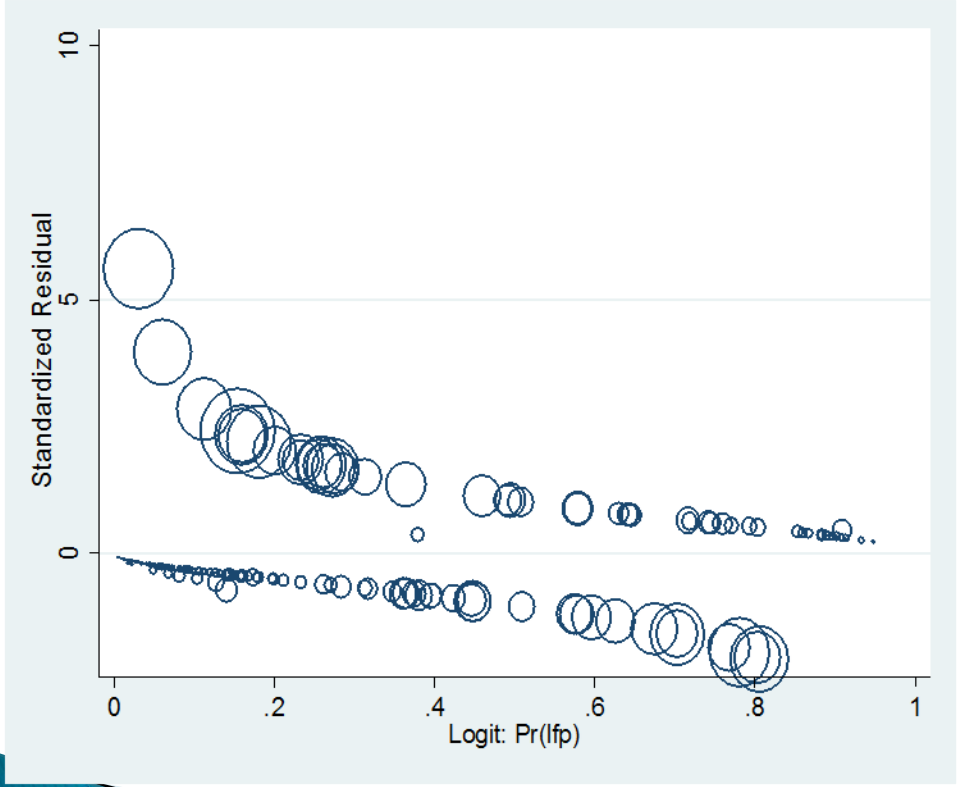
- Leverage residuals vs. predicted probabilities

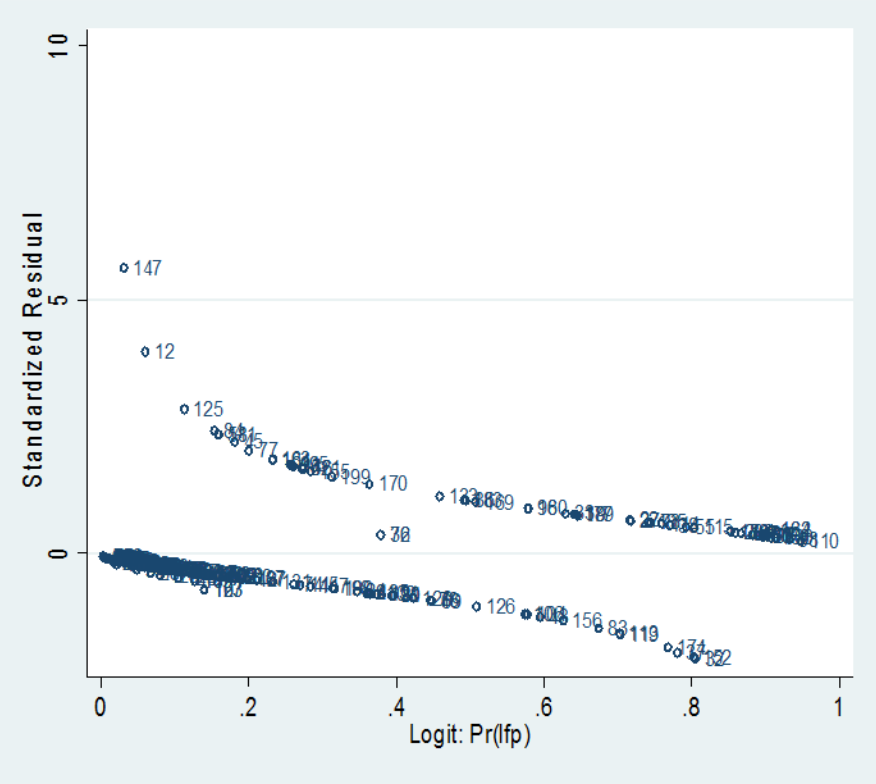




Diagnostyka - wykresy

- Residuals and Leverage



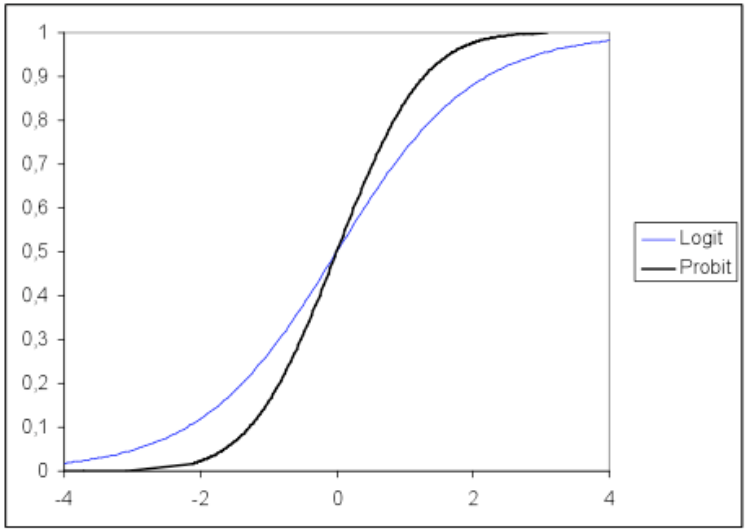


Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników

2. Liniowy model prawdopodobieństwa
   a) Interpretacja współczynników
3. Probit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka
4. Logit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

Logit



- W **modelu logitowym** zakładamy, że $F()$ jest dystrybuantą rozkładu logistycznego
- Założenia modelu logitowego:
  - Obserwacje są niezależne
  - Rozkład warunkowy:

$$Pr(y_i|x_i) = \begin{cases} \Lambda(x_i\beta) & dla\ \ y_i = 1 \\ 1 - \Lambda(x_i\beta) & dla\ \ y_i = 0 \end{cases}$$

- gdzie: $\Lambda(x_i\beta) = \frac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}$

- Logarytm funkcji wiarygodności:

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left[(1 - y_i) \ln\left(\frac{1}{1+e^{x_i\beta}}\right) + y_i \ln\left(\frac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}\right) \right]$$

Logit

- Wartość oczekiwana:

$$E(y_i|x_i) = 1 \cdot \Lambda(x_i\beta) + 0 \cdot (1 - \Lambda(x_i\beta)) = \Lambda(x_i\beta)$$

- Efekt cząstkowy dla zmiennej x_k:

$$\frac{\partial E(y|x)}{\partial x_k} = \frac{\partial \Lambda(x_i\beta)}{\partial x_k} = \Lambda'(x_i\beta)\beta_k = \Lambda(x_i\beta)(1 - \Lambda(x_i\beta))\beta_k$$

Logit - Interpretacja współczynników

- nie interpretuje się współczynników w modelu logitowym
- interpretuje się efekty cząstkowe (*krańcowe*):

a) dla zmiennych objaśniających ciągłych:
   - wpływ jednostkowej zmiany zmiennej niezależnej na wielkość prawdopodobieństwa sukcesu;
     - efekty cząstkowe dla zmiennych objaśniających ciągłych liczymy zwykle dla średnich wartości tych zmiennych (efekty cząstkowe zależą od wielkości zmiennych objaśniających)

b) dla zmiennych objaśniających zero-jedynkowych:
   - różnica między prawdopodobieństwem sukcesu dla zmiennej zero-jedynkowej równej 0 i równej 1, przy pozostałych zmiennych ustalonych na poziomie średnich

Logit - Interpretacja współczynników

- znak efektu cząstkowego dla danej zmiennej jest taki sam jak znak współczynnika przy tej zmiennej

- możemy zatem interpretować znaki przy współczynnikach:
  - dodatni znak $\Rightarrow$ zmienna wpływa dodatnio na prawdopodobieństwo sukcesu
  - ujemny znak $\Rightarrow$ zmienna wpływa ujemnie na prawdopodobieństwo sukcesu

Logit

```
Logistic regression                               Number of obs   =       4877
                                                  LR chi2(11)     =     324.97
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -2880.5412                       Pseudo R2       =     0.0534

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stateur |   .0953049   .0158821     6.00   0.000     .0641765    .1264332
     statemb |   .0061076   .0009994     6.11   0.000     .0041489    .0080663
         age |   .0195309   .0036723     5.32   0.000     .0123333    .0267286
      tenure |   .0308234   .0065936     4.67   0.000     .0179001    .0437467
       slack |   .6091688   .0659404     9.24   0.000      .479928    .7384096
        male |  -.1876878   .0860323    -2.18   0.029     -.356308   -.0190676
        smsa |  -.1664986   .0693336    -2.40   0.016      -.30239   -.0306072
     married |   .2403562   .0687984     3.49   0.000     .1055137    .3751986
     yrdispl |  -.0615481   .0149413    -4.12   0.000    -.0908324   -.0322638
         rr2 |  -1.151087   .4204778    -2.74   0.006    -1.975208   -.3269655
        head |  -.1879037   .0781542    -2.40   0.016    -.3410832   -.0347242
       _cons |  -1.373795    .255853    -5.37   0.000    -1.875258   -.8723321
------------------------------------------------------------------------------
```

Logit

```
Marginal effects after logit
      y  = Pr(y) (predict)
         =   .6970697
------------------------------------------------------------------------------
variable |      dy/dx    Std. Err.     z    P>|z|  [    95% C.I.   ]      X
---------+--------------------------------------------------------------------
 stateur |   .0201249      .00334    6.02   0.000   .013575  .026675   7.51103
 statemb |   .0012897      .00021    6.12   0.000   .000877  .001702    180.66
     age |   .0041242      .00077    5.33   0.000   .002608  .005641     36.13
  tenure |   .0065088      .00139    4.69   0.000   .003788   .00923   5.66414
   slack*|   .1273793      .01353    9.42   0.000    .10087  .153889   .476112
    male*|  -.0388319      .01742   -2.23   0.026  -.072971 -.004693   .764199
    smsa*|   -.034793      .01433   -2.43   0.015  -.062873 -.006713   .652655
 married*|   .0513508      .01485    3.46   0.001   .022251   .08045   .632766
 yrdispl |  -.0129967      .00315   -4.12   0.000  -.019175 -.006818   5.20361
     rr2 |  -.2430676      .08878   -2.74   0.006  -.417064 -.069071    .20344
    head*|  -.0391275      .01603   -2.44   0.015  -.070547 -.007708   .680541
------------------------------------------------------------------------------
(*) dy/dx is for discrete change of dummy variable from 0 to 1
```

Iloraz szans

- **Szansa** zdefiniowana jako prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia (*sukcesu*) w odniesieniu do zdarzenia przeciwnego (porażki)

$$Odds(x_i) = \frac{\Pr(y_i = 1|x_i)}{\Pr(y_i = 0|x_i)} = \frac{\frac{e^{x_i\beta}}{1 + e^{x_i\beta}}}{\frac{1}{1 + e^{x_i\beta}}} = e^{x_i\beta}$$

- **Iloraz szans** mówi ile więcej prawdopodobne jest (w odniesieniu do szansy), że określone zdarzenie wystąpi w jednej grupie w odniesieniu do tego samego zdarzenia w innej grupie

$$\frac{Odds(x_i)}{Odds(x_j)} = e^{(x_i - x_j)\beta} = e^{\Delta x\beta}$$

Logit – Iloraz szans

$exp(.0953049)$

```
Logistic regression                               Number of obs   =       4877
                                                  LR chi2(11)     =     324.97
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -2880.5412                       Pseudo R2       =     0.0534
```

y	Odds Ratio	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
stateur	1.099994	.0174702	6.00	0.000	1.066281	1.134774
statemb	1.006126	.0010055	6.11	0.000	1.004157	1.008099
age	**1.019723**	**.0037448**	**5.32**	**0.000**	**1.01241**	**1.027089**
tenure	1.031303	.0068	4.67	0.000	1.018061	1.044718
slack	1.838902	.1212579	9.24	0.000	1.615958	2.092605
male	.8288735	.0713099	-2.18	0.029	.7002569	.9811131
smsa	.846624	.0586995	-2.40	0.016	.7390498	.9698565
married	1.271702	.0874911	3.49	0.000	1.111281	1.45528
yrdispl	.9403077	.0140494	-4.12	0.000	.9131708	.9682512
rr2	.3162928	.1329941	-2.74	0.006	.1387324	.7211086
head	**.8286945**	**.064766**	**-2.40**	**0.016**	**.7109997**	**.9658717**

Różnice między probitem a logitem

- Różnica związana jest z przyjętą formą funkcyjną dystrybuanty $F()$.
- Interpretacja efektów cząstkowych jest identyczna.

- logit

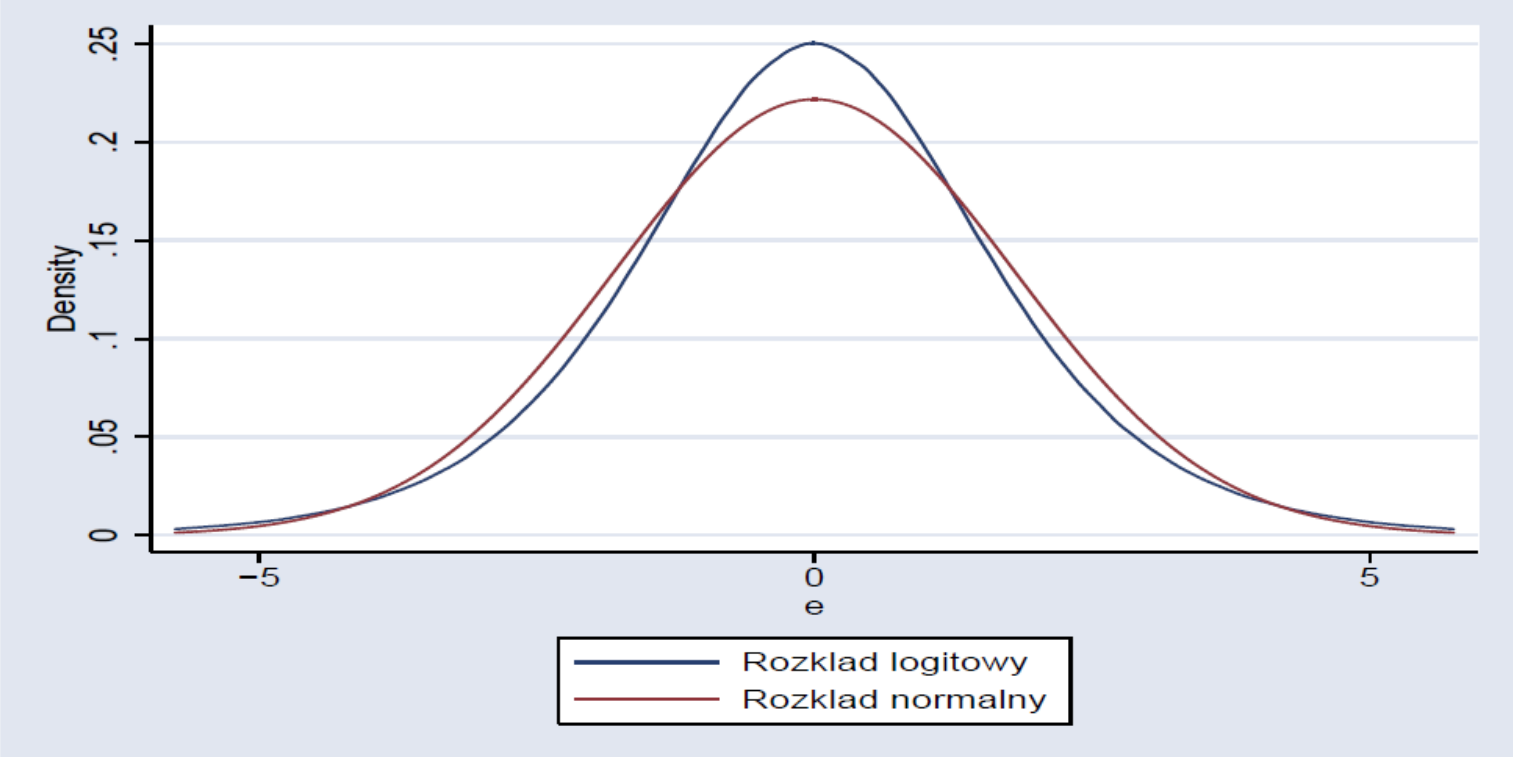
variable	dy/dx
stateur	.0201249
statemb	.0012897
age	.0041242
tenure	.0065088
slack*	.1273793
male*	-.0388319
smsa*	-.034793
married*	.0513508
yrdispl	-.0129967
rr2	-.2430676
head*	-.0391275

- probit

variable	dy/dx
stateur	.019886
statemb	.0012923
age	.0041137
tenure	.0060708
slack*	.1273458
male*	-.0393392
smsa*	-.033908
married*	.0510228
yrdispl	-.0130458
rr2	-.246271
head*	-.0382403

Różnice między probitem a logitem

- Oba rozkłady prawdopodobieństwa są symetryczne jednak rozkład logistyczny ma nieco grubsze ogony.



Różnice między probitem a logitem

- W związku z tym istotne różnice między modelami będą powstawać dla prób, o nikłym odsetku odpowiedzi 0 albo odpowiedzi 1 i bardzo zróżnicowanych zmiennych niezależnych.
- Dla $\bar{x}\beta$ bliskiego 0 funkcja gęstości :
  - $f_{probit}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$
  - $f_{logit}(0) \approx 0.25$
  - $f_{LPM}(0) = 1$

  - Przybliżona relacja między współczynnikami $logitu$ i $probitu$ będzie w przybliżeniu równa

$$f_{probit}(0)\beta_{probit} \approx f_{logit}(0)\beta_{logit}$$

$$\frac{\beta_{probit,i}}{\beta_{logit,i}} \approx \frac{0{,}4}{0{,}25} = 1{,}6$$

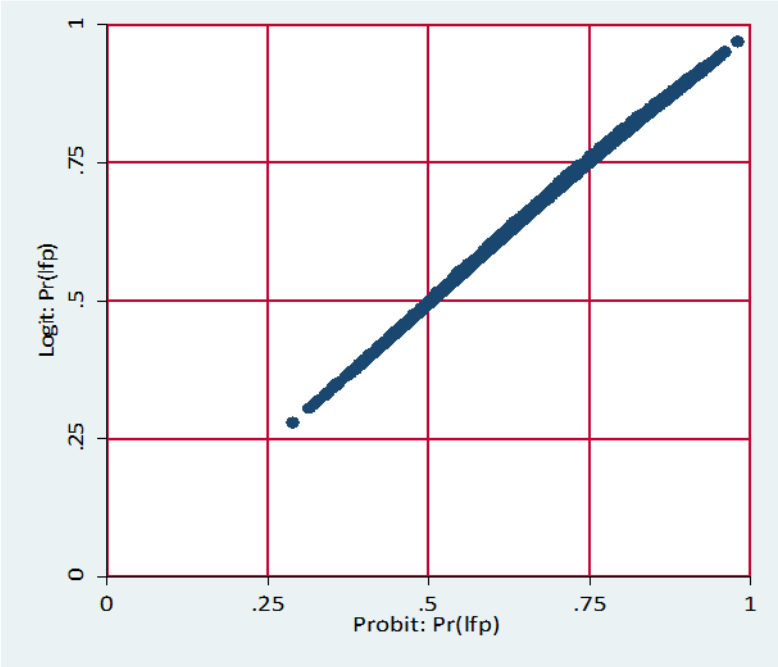
Różnice między probitem a logitem

- Nie ma dobrej statystyki, która mogłaby posłużyć do wyboru między tymi modelami.
  - W praktyce wybieramy ten, który jest analitycznie bardziej wygodny.
  - Kierujemy się także jakością dopasowania oraz wynikami testów diagnostycznych.

Różnice między probitem a logitem

```
pwcorr prlogit prprobit

             |  prlogit prprobit
-------------+------------------
     prlogit |   1.0000
    prprobit |   0.9996   1.0000
```



Pytania teoretyczne

1. Co to są ilorazy szans i dlaczego w kontekście modelu logitowego lepiej jest używać ilorazów szans niż efektów krańcowych.
2. Na czym polega różnica między LPM, logitem i probitem? Jakich statystyk można użyć by sprawdzić, który z tych modeli jest prawidłowy?

Dziękuję za uwagę