Modele ARMA Kointegracja, mechanizm korekty błędem

Stanisław Cichocki
Natalia Nehrebecka

Wykład 6

Plan wykładu

- 1. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA
- 2. Kointegracja
- 3. Mechanizm korekty błędem

Plan wykładu

- 1. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA
- 2. Kointegracja
- 3. Mechanizm korekty błędem

Prognozowanie za pomocą model ARMA

$$y_{T+1} = \mu + \alpha_1 y_T + \ldots + \alpha_p y_{T-p+1} + \varepsilon_{T+1} + \theta_1 \varepsilon_T + \ldots + \theta_q \varepsilon_{T-q+1}$$

- T to ostatni okres, dla którego mamy obserwacje w próbce.
- Po oszacowaniu parametrów można sformułować prognozę:

$$\widehat{y}_{T+1} = \widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_1 \widehat{y}_T + \widehat{\alpha}_2 \widehat{y}_{T-1} \ldots + \widehat{\alpha}_p \widehat{y}_{T-p+1} + \widehat{\theta}_1 e_T + \widehat{\theta}_2 \widehat{e}_{T-1} \ldots + \widehat{\theta}_q e_{T-q+1}$$

$$\widehat{y}_{T+2} = \widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_1 \widehat{y}_{T+1} + \ldots + \widehat{\alpha}_p \widehat{y}_{T-p+2} + \widehat{\theta}_2 e_T + \ldots + \widehat{\theta}_q e_{T-q+2}$$

Prognozowanie za pomocą model ARMA

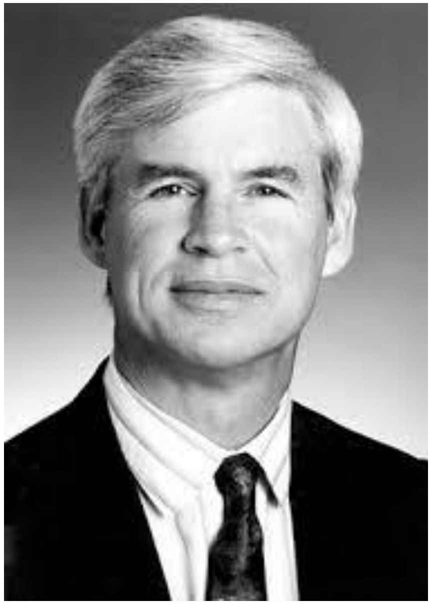
- W ten sposób możemy rekurencyjnie uzyskać prognozę $\widehat{y}_{T+s}$
- Jednak prognozowanie dla dłuższego horyzontu czasowego w przypadku modeli ARMA(p,q) nie ma sensu ponieważ prognozy zbiegają do równowagi długookresowej.
- Sensowne jest prognozowanie na max{p,q} okresów.

Plan wykładu

- 1. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA
- 2. Kointegracja
- 3. Mechanizm korekty błędem

Kointegracja

- Sztokholm, 10 grudnia 2003



Who’s that and what’s going on?

Kointegracja

- Sztokholm, 10 grudnia 2003

http://www.nobelprize.org/mediaplayer/index.php?id=996

Przypomnienie: regresja pozorna

- Generujemy obserwacje dwóch niezależnych zmiennych niestacjonarnych:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

gdzie: ε_t, u_t są białym szumem

Przypomnienie: regresja pozorna

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs = 1000000
-------------+------------------------------           F(  1,999998) =       .
       Model |  1.2699e+11     1  1.2699e+11           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  7.3603e+10999998  73602.6615           R-squared     =  0.6331
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.6331
       Total |  2.0059e+11999999  200593.883           Root MSE      =   271.3

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |  -1.072581   .0008166 -1313.53   0.000    -1.074182   -1.070981
       _cons |   264.1878   .3674638   718.95   0.000     263.4676     264.908
------------------------------------------------------------------------------
```

```
Durbin-Watson d-statistic(2, 1000000) =  .0000293
```

Przypomnienie: regresja pozorna

```
Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation
---------------------------------------------------------------------------
    lags(p)  |          chi2               df                 Prob > chi2
-------------+-------------------------------------------------------------
       1     |      999969.782              1                   0.0000
       2     |      999969.782              2                   0.0000
       3     |      999969.782              3                   0.0000
       4     |      999969.783              4                   0.0000
---------------------------------------------------------------------------
                        H0: no serial correlation
```

Przypomnienie: regresja pozorna

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =  999999
-------------+------------------------------           F(  1,999997) =    2.26
       Model |  2.26050612     1  2.26050612           Prob > F      =  0.1326
    Residual |  999321.194999997  .999324192           R-squared     =  0.0000
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.0000
       Total |  999323.455999998  .999325453           Root MSE      =  .99966

------------------------------------------------------------------------------
         D.y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |
         D1. |   .0015026   .0009991     1.50   0.133    -.0004555    .0034608
             |
       _cons |      .0002   .0009997     0.20   0.841    -.0017593    .0021593
------------------------------------------------------------------------------

Durbin-Watson d-statistic(2, 999999) =  2.000529
```

Przypomnienie: regresja pozorna

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	0.070	1	0.7911
2	0.081	2	0.9601
3	4.919	3	0.1778
4	4.992	4	0.2882

H0: no serial correlation

Kointegracja

- Rozwiązaniem problemu regresji pozornej może być różnicowanie, ale powoduje to utratę wielu informacji, w tym o zależnościach długookresowych.

Kointegracja

- Otrzymano następujące oszacowania modelu ARIMA(p,d,q):

$$\Delta y_t = \mu + 0{,}2\Delta y_{t-1} + 0{,}4\Delta y_{t-2} + \varepsilon_t + 0{,}2\varepsilon_{t-1}$$

- Czemu jest równy stan równowagi długookresowej w tym modelu?

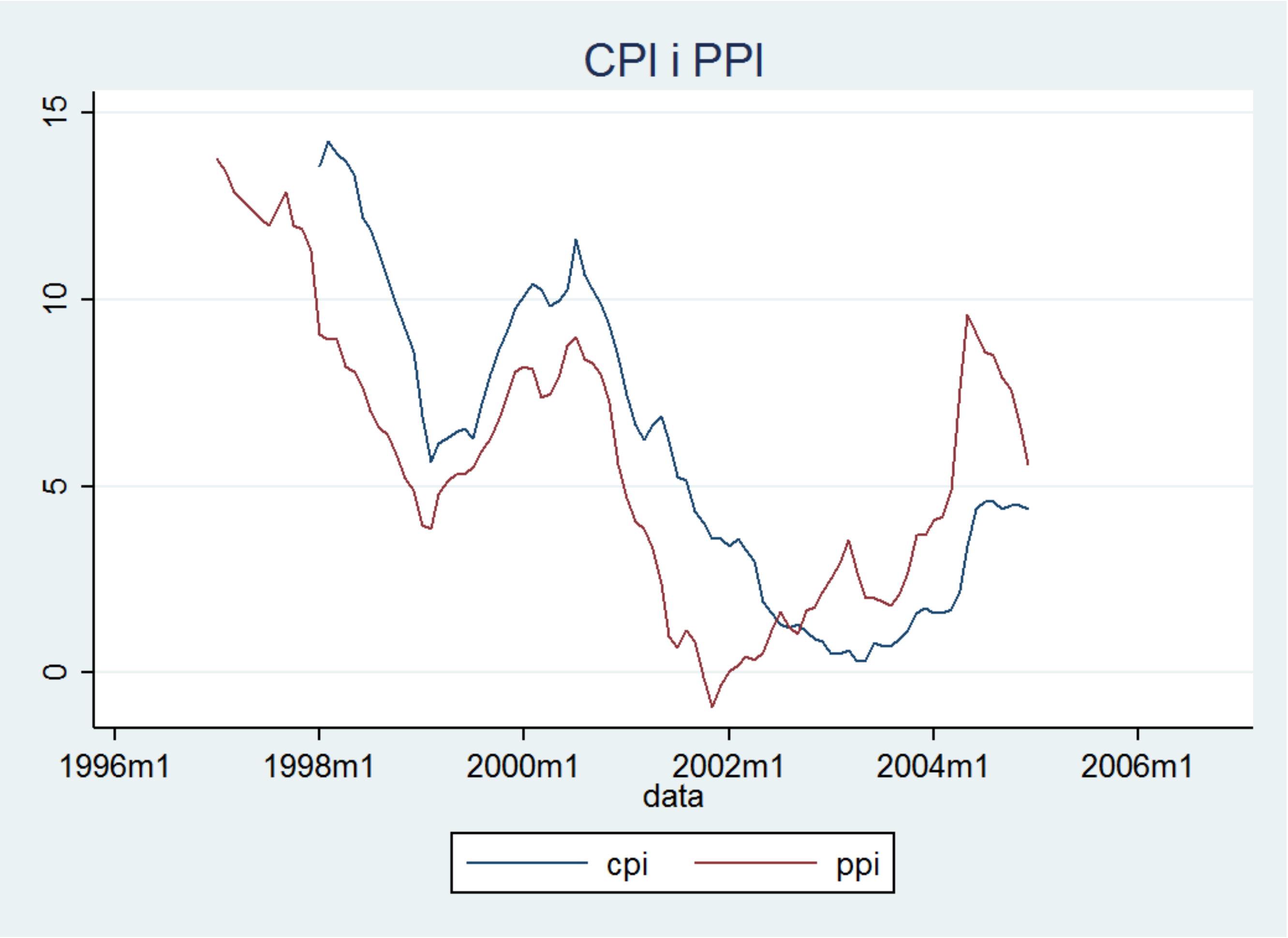
Kointegracja

- Stan równowagi długookresowej:

$$y^* = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \ldots = E(y_{t-p})$$
$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = \ldots = E(\varepsilon_{t-q}) = 0$$

$$E(y_t - y_{t-1}) = \mu + 0{,}2E(y_{t-1} - y_{t-2}) + 0{,}4E(y_{t-2} - y_{t-3}) + E\varepsilon_t + 0{,}2E\varepsilon_{t-1}$$

Kointegracja



Kointegracja

- Zmienne CPI i PPI są niestacjonarne.
- Jednocześnie wykazują wyraźną zależność długookresową – szeregi dryfują razem.
- Po zróżnicowaniu zależność ta może nie zostać uchwycona.

Kointegracja

- Rozwiązanie problemu: kointegracja.
- Kointegracja to długookresowy związek między dwiema (lub większą liczbą) niestacjonarnych zmiennych (zintegrowanych tego samego stopnia).
- Odchylenia od tego długookresowego związku są stacjonarne.

Kointegracja

- O wektorze $[y_t, x_t]$, którego każdy element jest I(1), mówimy, że jest skointegrowany, jeśli istnieje wektor β, że:

$$y_t - \beta x_t \sim I(0)$$

- Wektorem kointegrującym nazywamy współczynniki w kombinacji liniowej, która sprowadza wektor zmiennych losowych do stacjonarności.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$$

Plan wykładu

- 1. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA
- 2. Kointegracja
- 3. Mechanizm korekty błędem

Mechanizm korekty błędem

- Twierdzenie Grangera: pozwala na powiązanie kointegracji z pojęciem równowagi długookresowej.

- Twierdzenie Grangera:
  Jeśli (y_t, x_t) są skointegrowane, oraz y_t, x_t są I(1) to y_t można przedstawić w postaci Mechanizmu Korekty Błędem (ECM – Error Correction Mechanism)

$$\Delta y_t = \alpha(y_{t-1} - x_{t-1}\beta) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_{t-i} \gamma_i + \varepsilon_i$$

gdzie: $y_{t-1} - x_{t-1}\beta \sim I(0), \varepsilon_t \sim I(0)$

Mechanizm korekty błędem

- Twierdzenie Grangera umożliwia interpretację wektora kointegrującego jako relacji długookresowej między zmiennymi.

$$y^* = E(y_t) = \ldots = E(y_{t-k})$$
$$E(\Delta y_t) = \ldots = E(\Delta y_{k-1}) = 0$$
$$x^* = E(x_t) = \ldots = E(x_{t-k})$$
$$E(\Delta x_t) = \ldots = E(\Delta x_{k-1}) = 0$$

- A więc z ECM:

$$0 = \alpha(y^* - x^* \beta)$$

Mechanizm korekty błędem

- Równowaga długookresowa dana jest wzorem:

$$y^* = x^* \beta$$

- Interpretowana ona jest w kontekście ECM jako relacja między zmiennymi, do której dostosowuje się zmienna y_t .

- $y_t - x_t \beta$ jest odchyleniem od równowagi długookresowej (błędem).

Mechanizm korekty błędem

$$\Delta y_t = \alpha(y_{t-1} - x_{t-1}\beta) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_{t-i}\gamma_i + \varepsilon_i$$

- Współczynnik α związany jest więc z szybkością dostosowania y_t do poziomu równowagi (mierzy jaka część różnicy w stosunku do równowagi długookresowej z momentu t-1 jest korygowana w momencie t).
- Współczynniki θ_i, γ_i związane są z krótkookresową dynamiką zmiennej zależnej.

Mechanizm korekty błędem

- Dwustopniowa metoda Engla-Grangera służy do badania kointegracji.

- Uwaga: badanie kointegracji ma sens jedynie wtedy gdy y_t i wszystkie zmienne zawarte w x_t są I(1).

- Wobec tego pierwszym etapem musi być przetestowanie czy wszystkie analizowane zmienne są I(1).

Mechanizm korekty błędem

- Drugi etap:

  1. przeprowadzamy regresję

$$y_t = x_t \beta + u_t$$

 i otrzymujemy potencjalny wektor kointegrujący:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{\beta} \end{bmatrix}$$

Mechanizm korekty błędem

- Drugi etap:

2. testujemy stacjonarność reszt $\hat{u}_t$

$$\Delta \hat{u}_t = \rho u_{t-1} + \omega_t$$

Hipoteza zerowa: $\hat{u}_t$ jest niestacjonarne – brak kointegracji

Mechanizm korekty błędem

- Jeśli reszty są stacjonarne to szacujemy ECM wykorzystując uzyskane na pierwszy etapie oszacowanie $\hat{\beta}_t$

$$\Delta y_t = \alpha(y_{t-1} - x_{t-1}\hat{\beta}) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_{t-i}\gamma_i + \varepsilon_i$$

Liczbę opóźnień k ustalamy tak aby wyeliminować autokorelację reszt.

Mechanizm korekty błędem

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      84
-------------+------------------------------           F(  1,    82) =   78.84
       Model |   660.83351     1   660.83351           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  687.325741    82  8.38202123           R-squared     =  0.4902
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4840
       Total |  1348.15925    83  16.2428825           Root MSE      =  2.8952

------------------------------------------------------------------------------
         cpi |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         ppi |   .9483865   .1068104     8.88   0.000     .7359065    1.160866
       _cons |   1.351262   .5972153     2.26   0.026     .1632103    2.539313
------------------------------------------------------------------------------
```

Mechanizm korekty błędem

```
Dickey-Fuller test for unit root                   Number of obs   =        83

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)             -1.201            -3.534            -2.904            -2.587
------------------------------------------------------------------------------
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.6731

------------------------------------------------------------------------------
   D.reszty |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      reszty |
         L1. |  -.0273153   .0227429    -1.20   0.233    -.0725664    .0179359
             |
       _cons |  -.0702811   .0652026    -1.08   0.284    -.2000137    .0594515
------------------------------------------------------------------------------
```

Mechanizm korekty błędem

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	9.535	1	0.0020
2	10.709	2	0.0047
3	10.731	3	0.0133
4	12.189	4	0.0160

H0: no serial correlation

Mechanizm korekty błędem

```
Augmented Dickey-Fuller test for unit root         Number of obs   =        82

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)             -4.001            -3.535            -2.904            -2.587
------------------------------------------------------------------------------
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.005

------------------------------------------------------------------------------
    D.reszty |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      reszty |
         L1. |  -.0862095    .021514    -4.00   0.000     -.129007    -.043411
         LD. |   .3492704    .105075     3.32   0.001     .1401238     .558417
             |
       _cons |   -.052963   .0618066    -0.86   0.394     -.175986      .07006
------------------------------------------------------------------------------
```

Mechanizm korekty błędem

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	1.900	1	0.1681
2	2.105	2	0.3491
3	2.591	3	0.4591
4	2.832	4	0.5863

H0: no serial correlation

Mechanizm korekty błędem

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      83
-------------+------------------------------           F(  2,    80) =   23.62
       Model |   9.3347911     2  4.66739555           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  15.8081975    80  .197602469           R-squared     =  0.3713
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.3555
       Total |  25.1429886    82  .306621813           Root MSE      =  .44452

------------------------------------------------------------------------------
       D.cpi |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      reszty |
         L1. |   -.066879   .0177171    -3.77   0.000    -.1021372   -.0316208
             |
         ppi |
         D1. |   .3388519   .0758191     4.47   0.000     .1879672    .4897367
             |
       _cons |  -.0945384   .0488884    -1.93   0.057    -.1918293    .0027526
------------------------------------------------------------------------------
```

Mechanizm korekty błędem

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	8.461	1	0.0036
2	8.585	2	0.0137
3	8.743	3	0.0329
4	8.920	4	0.0631

H0: no serial correlation

Mechanizm korekty błędem

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      82
-------------+------------------------------           F(  3,    78) =   25.84
       Model |  12.2168005     3  4.07226684           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  12.2937651    78  .157612372           R-squared     =  0.4984
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4791
       Total |  24.5105656    81  .302599575           Root MSE      =    .397

------------------------------------------------------------------------------
       D.cpi |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      reszty |
         L1. |  -.0490505   .0171352    -2.86   0.005     -.083164   -.0149371
             |
         ppi |
         D1. |   .3166457   .0678827     4.66   0.000     .1815017    .4517897
             |
         cpi |
         LD. |   .3334635   .0860572     3.87   0.000     .1621368    .5047902
             |
       _cons |  -.0711289   .0449371    -1.58   0.118    -.1605917     .018334
------------------------------------------------------------------------------
```

Mechanizm korekty błędem

```
Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation
---------------------------------------------------------------------------
    lags(p)  |          chi2               df                 Prob > chi2
-------------+-------------------------------------------------------------
       1     |          1.001               1                   0.3170
       2     |          1.012               2                   0.6029
       3     |          1.031               3                   0.7938
       4     |          1.106               4                   0.8933
---------------------------------------------------------------------------
                        H0: no serial correlation
```

Pytania teoretyczne

1. Wyjaśnić w jaki sposób tworzone są prognozy za pomocą modelu ARMA(p,q).
2. Wyjaśnić jaki jest związek między kointegracją a mechanizmem korekty błędem (ECM).
3. Podać interpretację poszczególnych współczynników w mechanizmie korekty błędem (ECM).
4. Opisać metodę testowania kointegracji za pomocą dwustopniowej metody Engla-Grangera.

Dziękuję za uwagę