Ekonometria

Metoda Najmniejszych Kwadratów – przypadek wielu zmiennych cz. II

Natalia Nehrebecka
Stanisław Cichocki

Wykład 3

Plan wykładu

- 1. MNK - przypadek wielu zmiennych
- 2. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Plan wykładu

- 1. MNK - przypadek wielu zmiennych
- 2. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Postać modelu

$$y_i = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \ldots + x_{Ki}\beta_K + \varepsilon_i$$

PRZYKŁAD – model ceny mieszkań:

Y_i - cena mieszkania i [tys PLN], $i = 1,2, \ldots, N$

P_i - powierzchnia mieszkania i [m^2]

L_i - lokalizacja mieszkania i ($L_i = 1$ dla centrum i $L_i = 0$ dla pozostałych dzielnic)

S_i – standard wykończenia mieszkania i

Postać modelu - zapis macierzowy

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{K1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{KN} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Stąd równanie macierzowe ma postać:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Zadanie

Zapisz

- model teoretyczny,
- model wyestymowany,
- wartości dopasowane oraz
- reszty

dla modelu linowego zawierającego K zmiennych objaśniających

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Suma kwadratów reszt - zapis macierzowy

$$S(b)=\sum_{i=1}^{N}e_i^2=\begin{bmatrix}e_1 & \cdots & e_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_N\end{bmatrix}=e'e=(y-Xb)'(y-Xb)=$$

$$=y'y-y'Xb-b'X'y+b'X'Xb$$

- Ponieważ $y'Xb=b'X'y$
- Zatem: $S(b)=y'y-2y'Xb+b'X'Xb$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Warunki pierwszego rzędu

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\partial y' y}{\partial b} - \frac{\partial 2 y' X b}{\partial b} + \frac{\partial b' X' X b}{\partial b} =$$

$$= -2X' y + 2X' X b = 0$$

- bo:

$$\frac{\partial \alpha \beta}{\partial \beta} = \alpha' \quad \frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = (A + A')\beta$$

Przypomnienie!

$$\frac{\partial a'\beta}{\partial \beta} = a, \quad \frac{\partial a'\beta}{\partial \beta'} = a'$$

- Niech: $\beta' = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{bmatrix}, \; a' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{bmatrix}.$
- Niech: $f(\beta_1, \ldots, \beta_k) = a'\beta = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_k\beta_k$

$$\frac{\partial a'\beta}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = a$$

$$\frac{\partial a'\beta}{\partial \beta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a'\beta}{\partial \beta_1} & \frac{\partial a'\beta}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial a'\beta}{\partial \beta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{bmatrix} = a'$$

Przypomnienie!

$$\frac{\partial A\beta}{\partial \beta'} = A, \ \frac{\partial \beta' A}{\partial \beta} = A$$

- Niech A będzie macierzą wymiaru nxn natomiast β wektorem n-elementowym.

$$A\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\beta_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\beta_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\beta_i \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A\beta}{\partial \beta'} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\beta_i}{\partial \beta'} \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\beta_i}{\partial \beta'} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\beta_i}{\partial \beta'} \end{bmatrix}$$

Przypomnienie!

$$\frac{\partial A\beta}{\partial \beta'} = A, \ \frac{\partial \beta' A}{\partial \beta} = A$$

- Niech A będzie macierzą wymiaru nxn natomiast β wektorem n-elementowym.

$$\beta' A = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\beta_i & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\beta_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}\beta_i \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \beta' A}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\beta_i}{\partial \beta} & \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\beta_i}{\partial \beta} & \cdots & \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{in}\beta_i}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

Przypomnienie!

$$\frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = (A + A')\beta$$

$$\beta' A \beta = \sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}$$

$$\frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}}{\partial \beta_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\sum_{i,j} \beta_i \beta_j a_{ij}}{\partial \beta_n} \end{bmatrix}$$

Przypomnienie!

- Rozwiniemy ***l***-ty element powyższej macierzy:

$$\frac{\sum_{i,j}\beta_i\beta_j a_{ij}}{\partial\beta_l} = \frac{\beta_1\sum_j\beta_j a_{1j} + \beta_2\sum_j\beta_j a_{2j} + \ldots + \beta_l\sum_j\beta_j a_{lj} + \ldots + \beta_n\sum_j\beta_j a_{nj}}{\partial\beta_l} =$$

$$\beta_1 a_{1l} + \beta_2 a_{2l} + \ldots + \beta_l a_{ll} + \sum_j\beta_j a_{lj} + \ldots + \beta_n a_{nl} = \sum_j\beta_j a_{lj} + \sum_j\beta_j a_{jl} = \sum_j\beta_j(a_{lj} + a_{jl})$$

$$\frac{\partial\beta' A\beta}{\partial\beta} = \begin{bmatrix} \sum_j\beta_j(a_{1j} + a_{j1}) \\ \sum_j\beta_j(a_{2j} + a_{j2}) \\ \vdots \\ \sum_j\beta_j(a_{nj} + a_{jn}) \end{bmatrix} = (A + A')\beta$$

Przypomnienie!

- Jeśli macierz A jest symetryczna, to $A = A'$

$$\frac{\partial \beta' A \beta}{\partial \beta} = 2A\beta$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Układ równań normalnych

$$-2X'y + 2X'Xb = 0$$

$$X'Xb = X'y \quad /(X'X)^{-1}$$

$$\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}b = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\Downarrow$$

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

$$X'Xb = X'y$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{Ki} \\ \sum_{i=1}^{N} x_{2i} & \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{Ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_{Ki} & \sum_{i=1}^{N} x_{Ki}x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{Ki}^2 \end{bmatrix}}_{X'X - macierz\ symetryczna} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_{2i}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_{Ki}y_i \end{bmatrix}}_{X'y}$$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Rozwiązanie układu równań normalnych :

$$X'Xb = X'y$$

- istnieje o ile macierz ***X*** ma **pełny rząd kolumnowy**,
  tzn. jej kolumny są liniowo niezależne $\longrightarrow$
  wtedy macierz $X'X$ jest nieosobliwa i istnieje $(X'X)^{-1}$.

Przypomnienie!

- Wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowo niezależne, jeśli jedynym rozwiązaniem równania:

$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_k\alpha_k = b_1\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{12}\\ \vdots\\ \alpha_{1n}\end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix}\alpha_{21}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{2n}\end{bmatrix} + \dots + b_k\begin{bmatrix}\alpha_{k1}\\ \alpha_{k2}\\ \vdots\\ \alpha_{kn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

- są $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$

MNK - przypadek wielu zmiennych

- MNK nie da się oszacować modelu w którym:
  - Kolumny macierzy X są liniowo **zależne**

  i/lub

  - (*K>N*) liczba zmiennych (*parametrów*) przekracza liczbę obserwacji

MNK - przypadek wielu zmiennych

- Warunki drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 S(b)}{\partial b \partial b'} = -2\frac{\partial X' y}{\partial b'} + 2\frac{\partial X' Xb}{\partial b'} = 2X'X$$

$X'X$ $-$ *jest dodatnio określona macierz*

MNK - przykład

- Badano zależność między liczbą punktów z egzaminu (0-10) y_i a czasem poświęconym na naukę x_i .
- Zebrano dane dla 5 studentów.

i	y_i	x_i
1	8	7
2	3	1
3	5	3
4	4	4
5	10	5

$$y_i = \beta_1 + x_i\beta_2 + \varepsilon_i$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 100 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}05 \end{bmatrix}$$

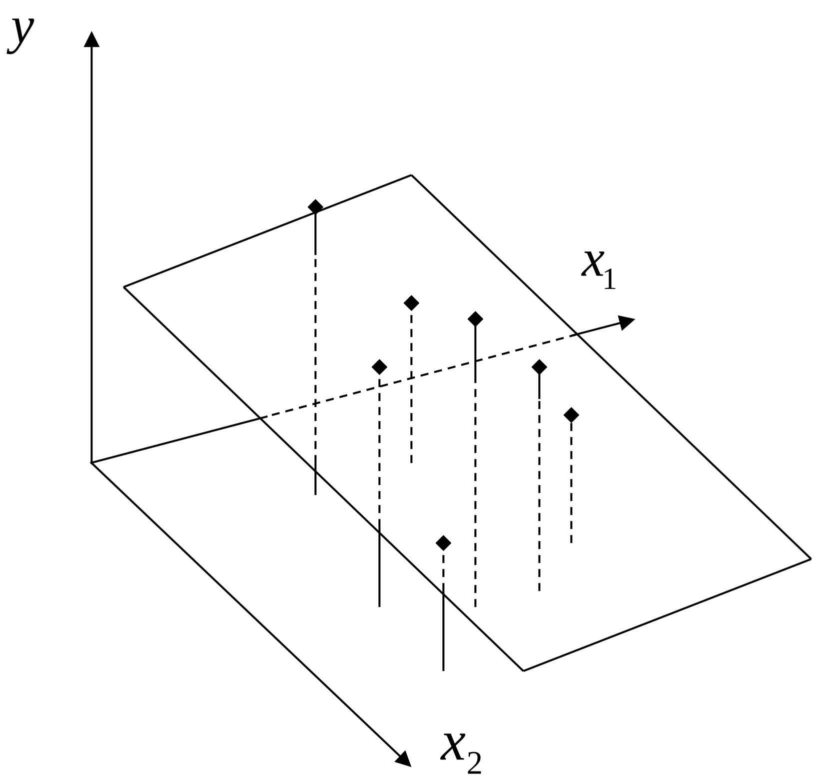
$$X'y = \begin{bmatrix} 30 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Plan wykładu

- 1. MNK - przypadek wielu zmiennych
- 2. Własności hiperpłaszczyzny regresji

Hiperpłaszczyzna



Własności hiperpłaszczyzny regresji

1. $X'e = 0$
2. $\hat{y}'e = 0$

- Dodatkowo dla modelu ze stałą:

3. $\sum_{i=1}^{N} e_i = 0$
4. $\bar{y} = \bar{\hat{y}}$

Pytania teoretyczne

1. Co to jest układ równań normalnych?
2. Wyprowadzić estymator MNK dla modelu z wieloma zmiennymi objaśniającymi.
3. Dlaczego nie da się uzyskać oszacowań MNK, jeśli liczba zmiennych objaśniających w modelu jest większa od liczby obserwacji.
4. Pokazać , że w modelu ze stałą suma reszt jest równa zero.
5. Pokazać, że w modelu ze stałą średnia wartość zmiennej zależnej równa jest średniej z wartości dopasowanych.

Dziękuję za uwagę