

Modele ARMA

Stanisław Cichocki
Natalia Nehrebecka

Wykład 5

Plan wykładu

- ▶ 1. Proces AR
- ▶ 2. Proces MA
- ▶ 3. Modele ARMA
- ▶ 4. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA

Plan wykładu

- ▶ 1. Proces AR
- ▶ 2. Proces MA
- ▶ 3. Modele ARMA
- ▶ 4. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA

Proces AR

- ▶ Proces autoregresyjny (autoregressive) rzędu p : AR(p)

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

gdzie ε_t jest białym szumem.

Przykładowo AR(1):

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Plan wykładu

- ▶ 1. Proces AR
- ▶ 2. Proces MA
- ▶ 3. Modele ARMA
- ▶ 4. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA

Proces MA

- ▶ Proces średniej ruchomej (moving average) rzędu q : MA(q)

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

gdzie ε_t jest białym szumem.

Przykładowo MA(1):

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Plan wykładu

- ▶ 1. Proces AR
- ▶ 2. Proces MA
- ▶ 3. Model ARMA
- ▶ 4. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA

Modele ARMA

- ▶ Modele autoregresyjne ze średnią ruchomą (autoregressive moving average) ARMA(p,q):

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \text{dla} \quad t \neq s$$

Modele ARMA

- ▶ Modele autoregresyjne ze średnią ruchomą ARMA(p,q) nie są oparte na teorii ekonomicznej – są to modele ateoretyczne.
- ▶ W przypadku tych modeli analizowane są wyłącznie własności statystyczne danego szeregu czasowego.
- ▶ Modele te są użytecznym narzędziem progностycznym.

Modele ARMA

- ▶ Modele te są szacowane za pomocą Metody Największej Wiarygodności (MNW) lub Nieliniowej Metody Najmniejszych Kwadratów (NMNK).

Modele ARMA

- ▶ Stan równowagi długookresowej w modelu ARMA(p,q):

$$y^* = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots E(y_{t-p})$$

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = \dots = E(\varepsilon_{t-q}) = 0$$

Modele ARMA

- ▶ Stan równowagi długookresowej w modelu ARMA(p,q):

$$y^* = \mu + \alpha_1 y^* + \dots + \alpha_p y^*$$

$$(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p) y^* = \mu$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

Modele ARMA

- ▶ Model ARIMA(p,d,q) to odpowiednik modelu ARMA (p,q) dla zmiennej niestacjonarnej.

$$\Delta_d y_t = \mu + \alpha_1 \Delta_d y_{t-1} + \alpha_2 \Delta_d y_{t-2} + \dots + \alpha_p \Delta_d y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- ▶ d – określa stopień zintegrowania zmiennej.
- ▶ ARIMA(p,0,q) to inaczej ARMA(p,q).

Modele ARMA

- ▶ Identyfikacja rzędów p i q :
 - a) Funkcje ACF i PACF;
 - b) metoda od ogólnego do szczególnego;
 - c) kryteria informacyjne.

Funkcja ACF

- ▶ Funkcja autokorelacji (Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwoma realizacjami y_t oddalonymi w czasie o k okresów.

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\text{Var}(y_t)}$$

$$\rho \in [-1,1]$$

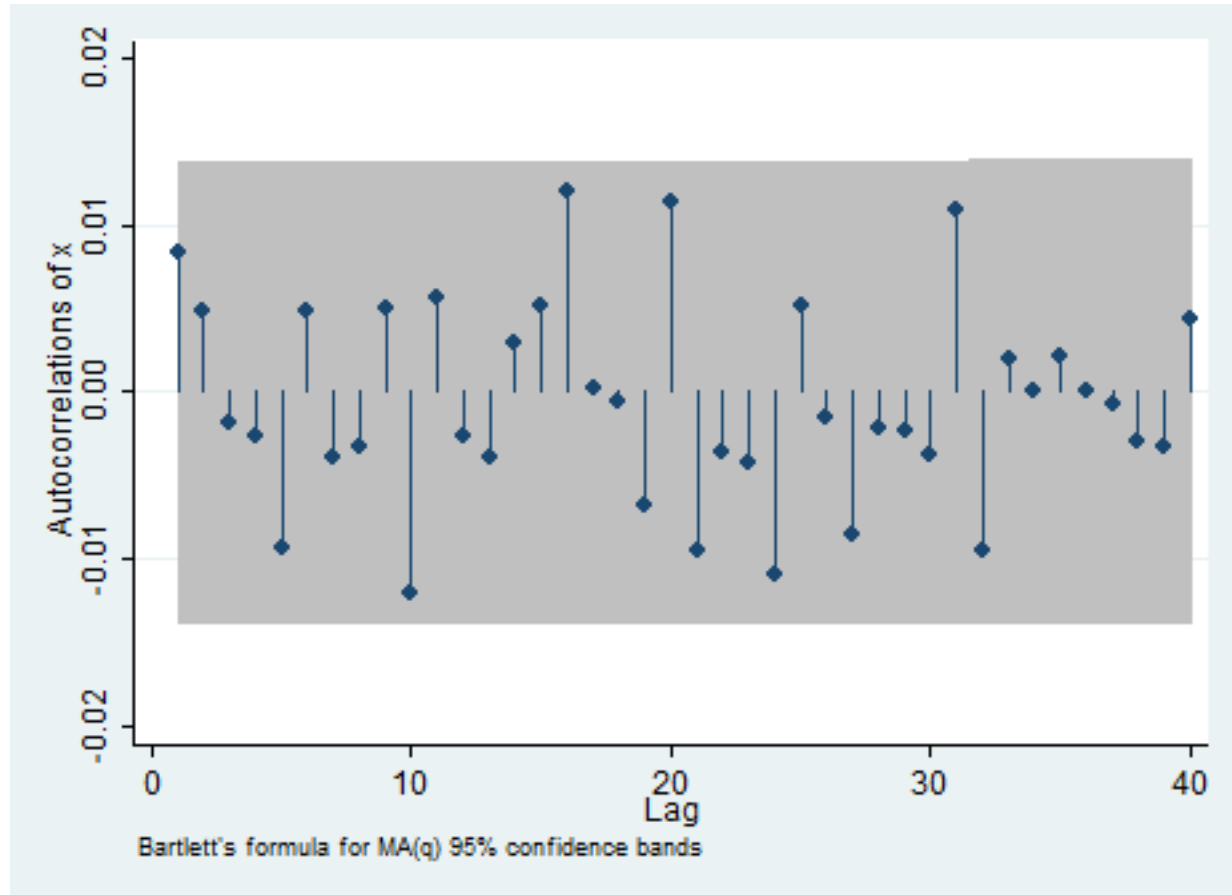
Funkcja PACF

- ▶ Funkcja autokorelacji cząstkowej (Partial Autocorrelation Function) mierzy korelację między obserwacjami y_t oddalonymi od siebie o k okresów bez uwzględnienia wpływu $y_{t-k-1}, y_{t-k-2}, \dots, y_{t-1}$
- ▶ Funkcja ta jest równa wyestymowanemu współczynnikowi α_k w modelu autoregresyjnym k tego rzędu:

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

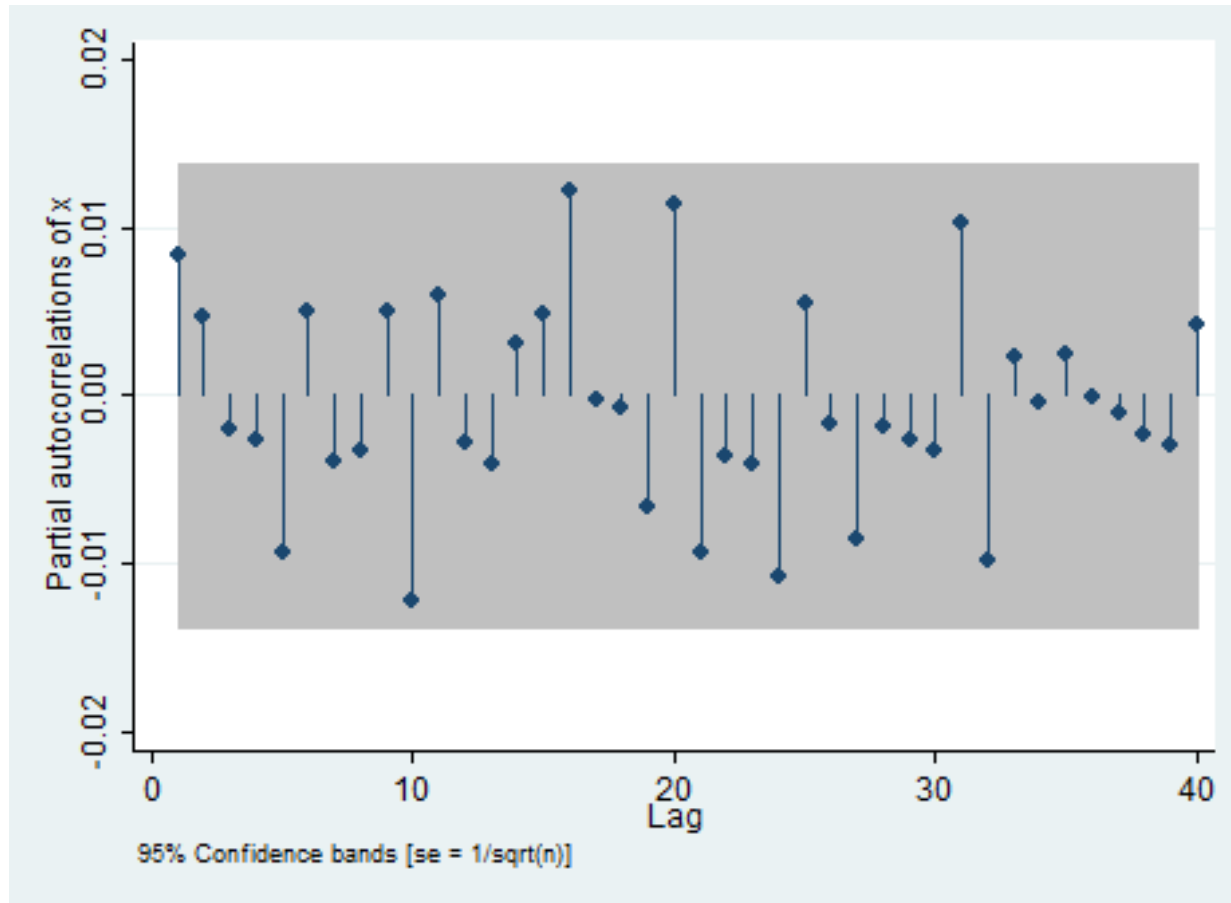
Funkcja ACF

- ▶ ACF dla białego szumu



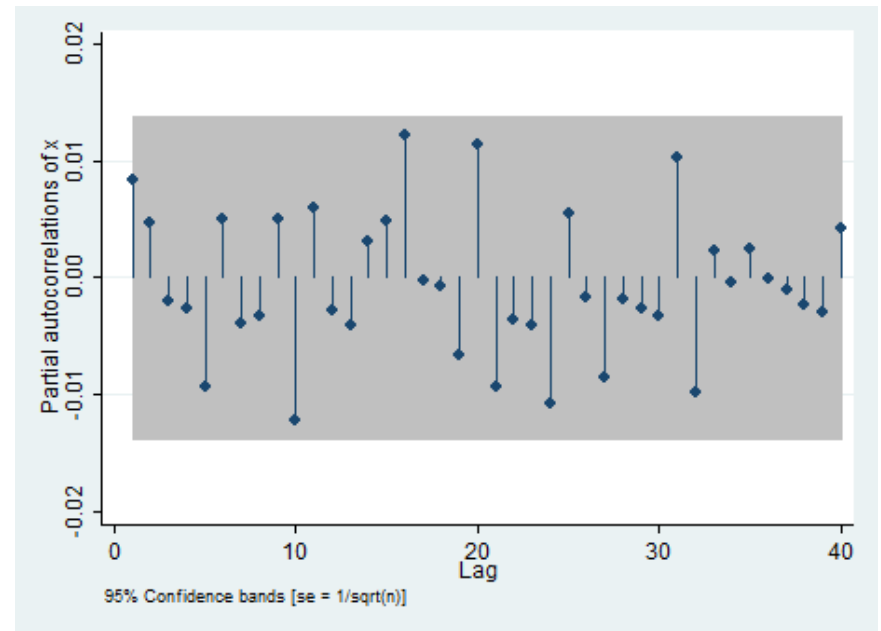
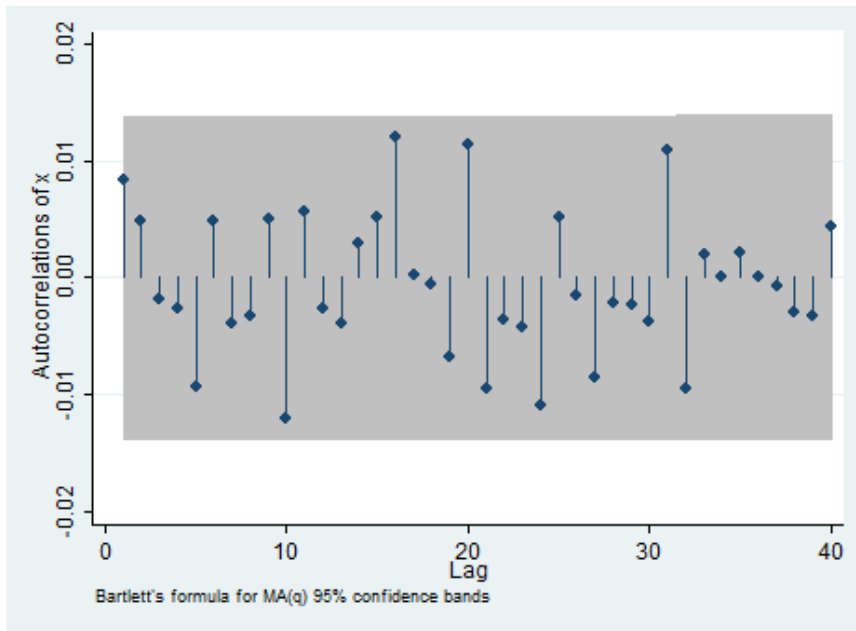
Funkcja PACF

- ▶ PACF dla białego szumu



Funkcja ACF i PACF

- ▶ ACF i PACF dla białego szumu

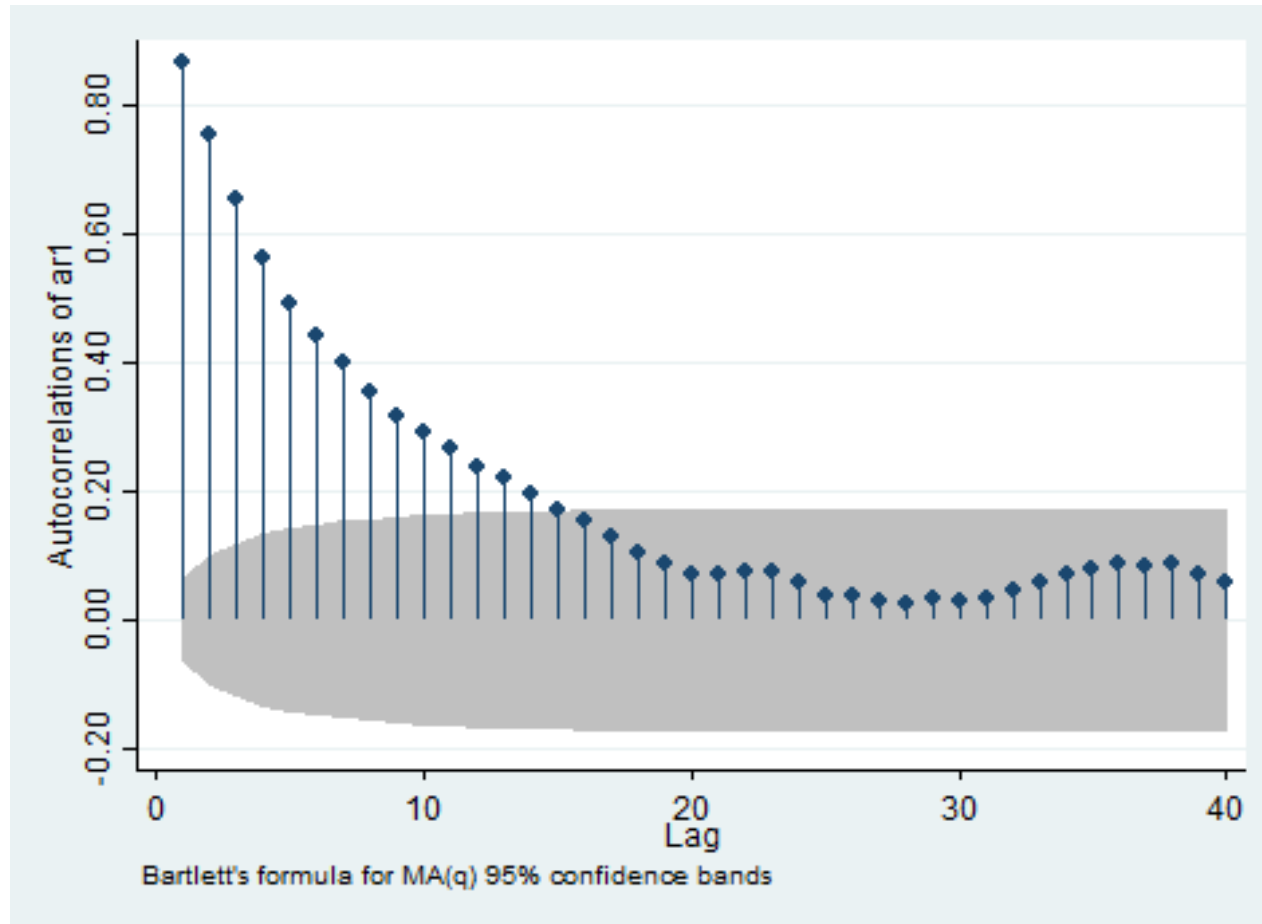


Funkcja ACF i PACF

LAG	AC	PAC	Q	Prob>Q	-1 [Autocorrelation]	0	1	-1 [Partial Autocor]	0	1
1	0.0083	0.0083	1.3868	0.2389						
2	0.0048	0.0047	1.8458	0.3974						
3	-0.0019	-0.0020	1.9194	0.5893						
4	-0.0027	-0.0027	2.068	0.7233						
5	-0.0094	-0.0093	3.828	0.5744						
6	0.0048	0.0050	4.2914	0.6373						
7	-0.0039	-0.0039	4.599	0.7088						
8	-0.0033	-0.0034	4.823	0.7763						
9	0.0050	0.0050	5.3186	0.8057						
10	-0.0120	-0.0122	8.2129	0.6081						

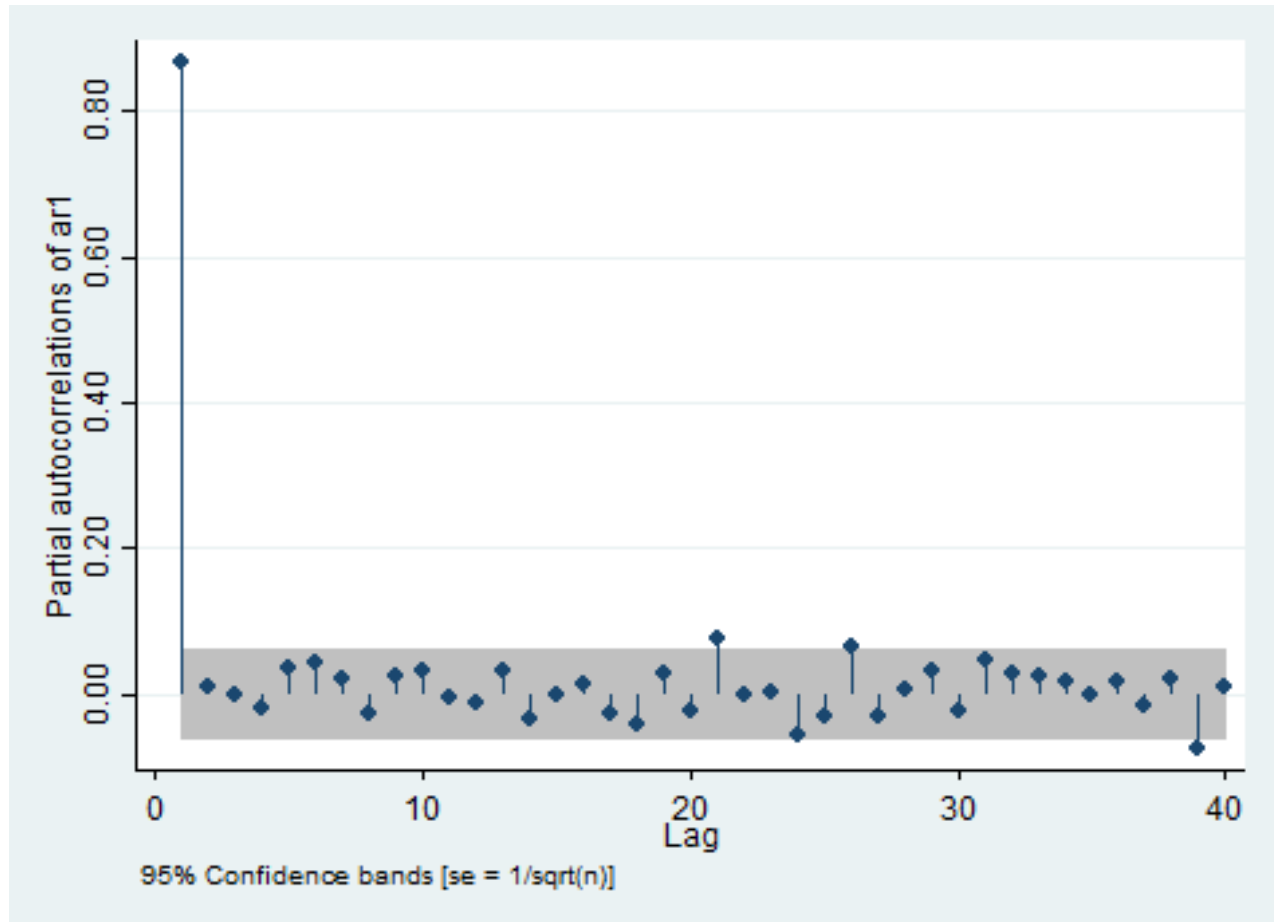
Funkcja ACF

- ▶ ACF dla AR(1) gdy $|\alpha| < 1$



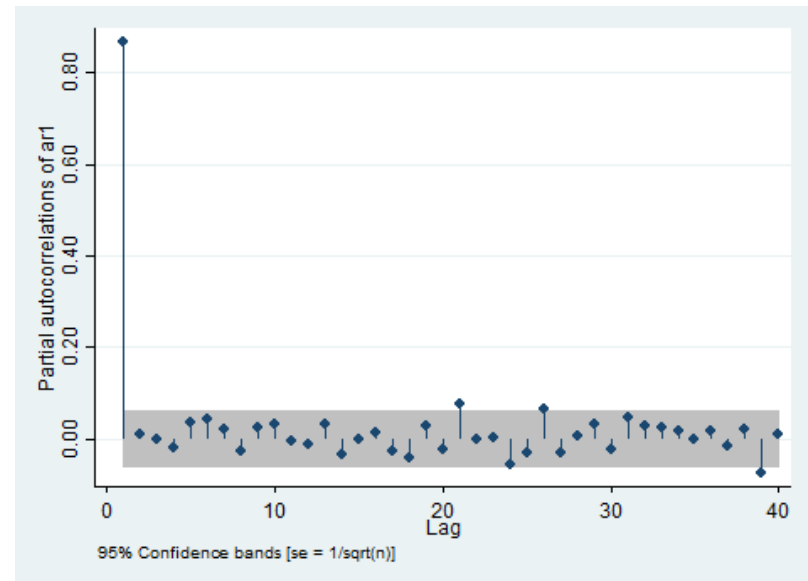
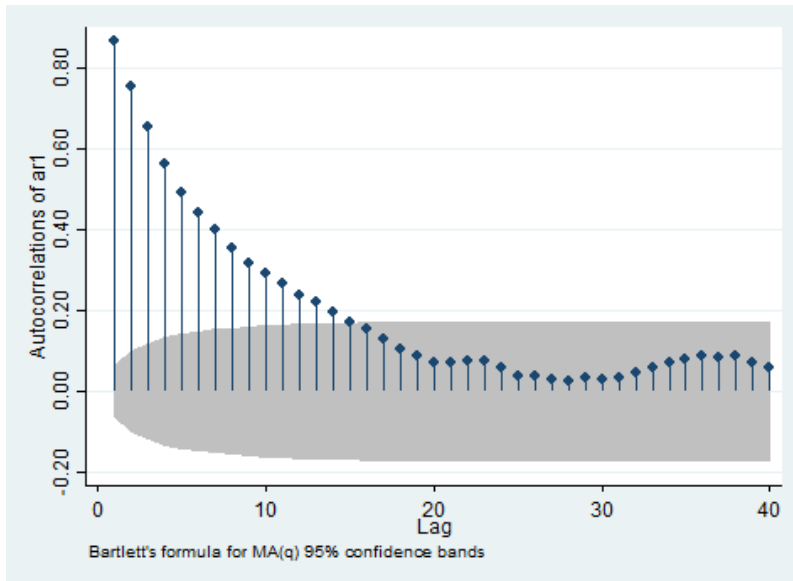
Funkcja PACF

- ▶ PACF dla AR(1) gdy $|\alpha| < 1$



Funkcja ACF i PACF

- ▶ ACF i PACF dla AR(1) gdy $|\alpha| < 1$

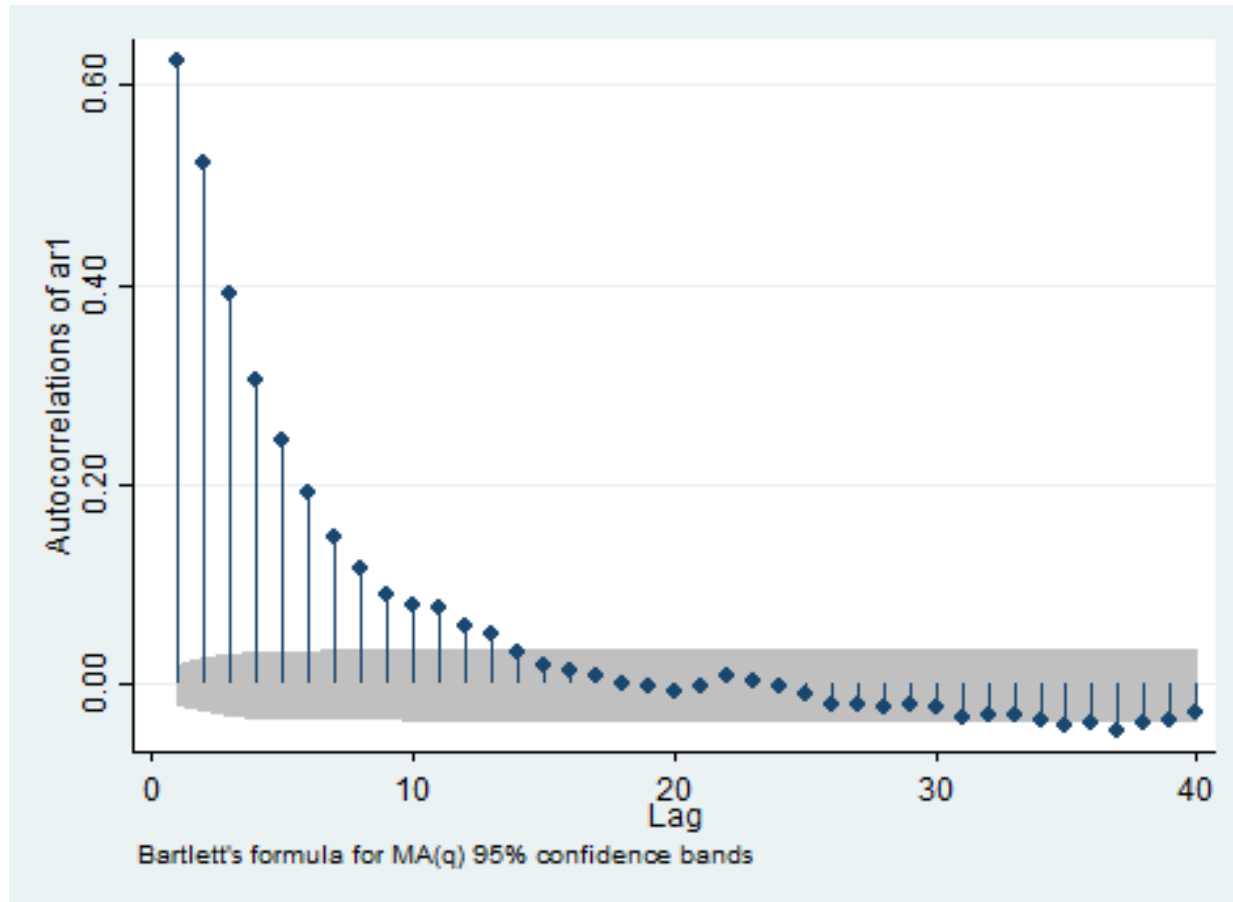


Funkcja ACF i PACF

LAG	AC	PAC	Q	Prob>Q	-1	0	1	-1	0	1	
					Prob>Q	[Autocorrelation]			[Partial Autocor]		
1	0.8668	0.8683	753.52	0.0000		-----		-----			
2	0.7536	0.0114	1323.6	0.0000		-----					
3	0.6538	-0.0012	1753.2	0.0000		-----					
4	0.5624	-0.0212	2071.4	0.0000		-----					
5	0.4921	0.0349	2315.3	0.0000		---					
6	0.4400	0.0419	2510.5	0.0000		---					
7	0.3974	0.0219	2669.9	0.0000		---					
8	0.3519	-0.0275	2795	0.0000		--					
9	0.3178	0.0228	2897.1	0.0000		--					
10	0.2931	0.0307	2984.1	0.0000		--					

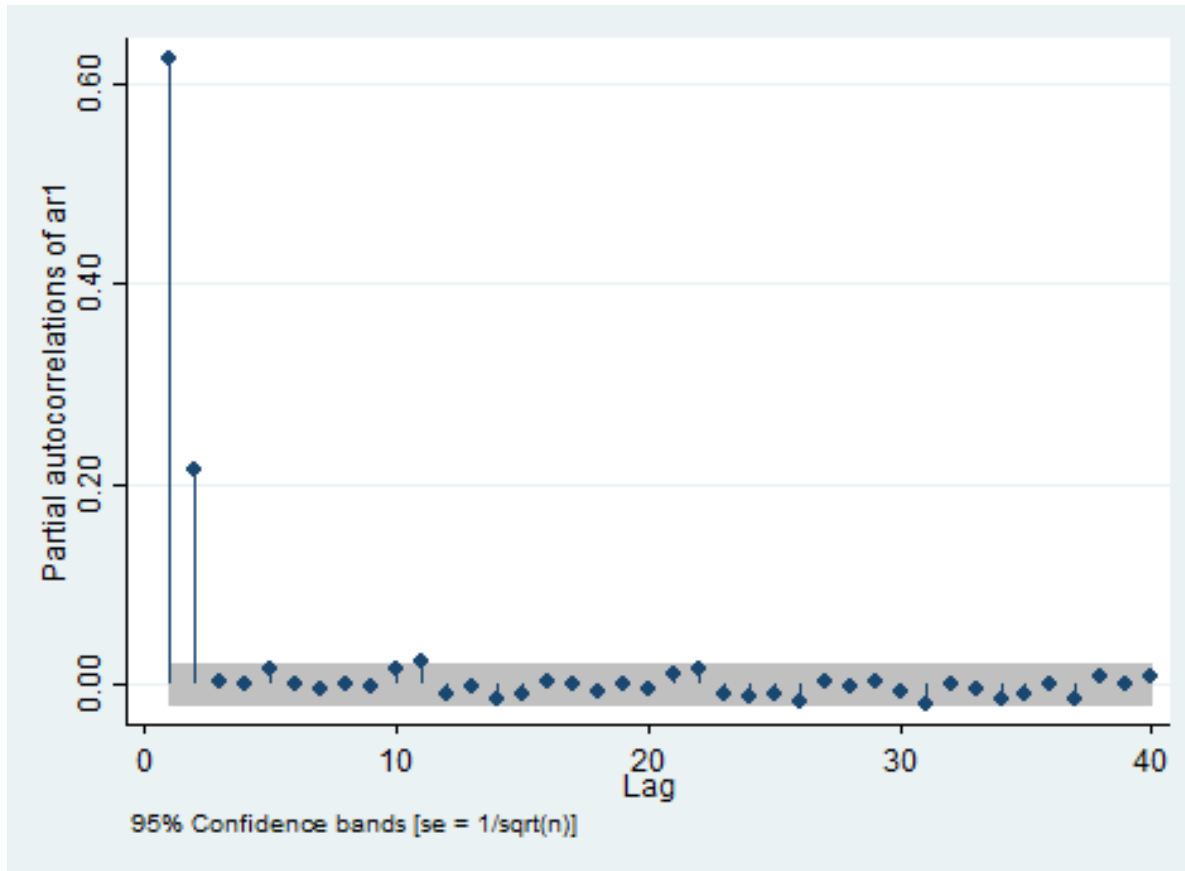
Funkcja ACF

- ▶ ACF dla AR(2)



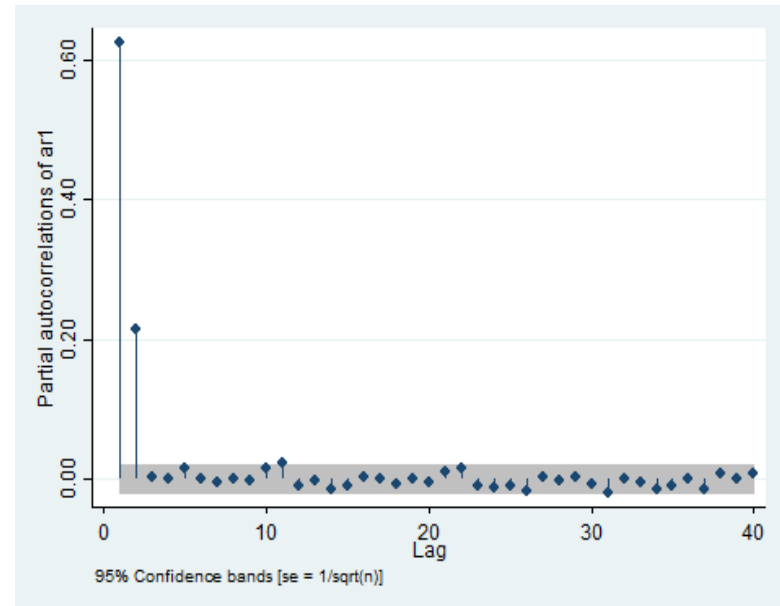
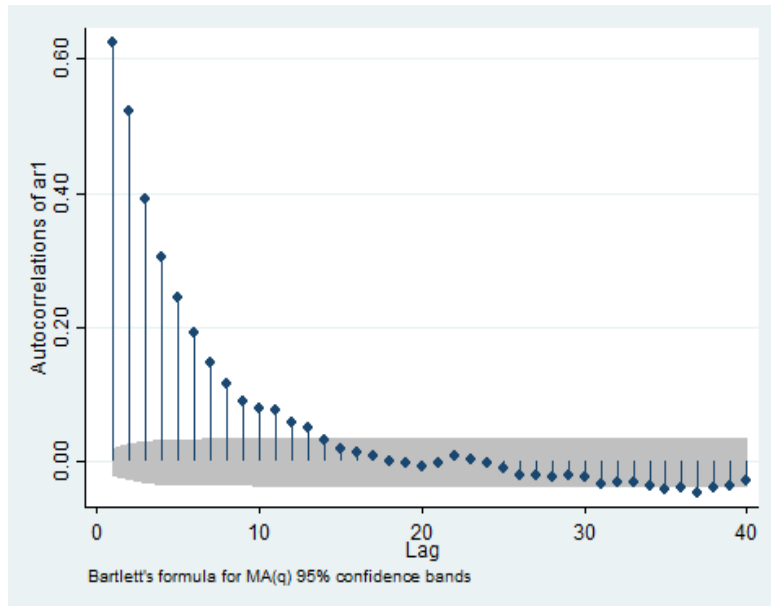
Funkcja PACF

- ▶ PACF dla AR(2)



Funkcja ACF i PACF

- ▶ ACF i PACF dla AR(2)

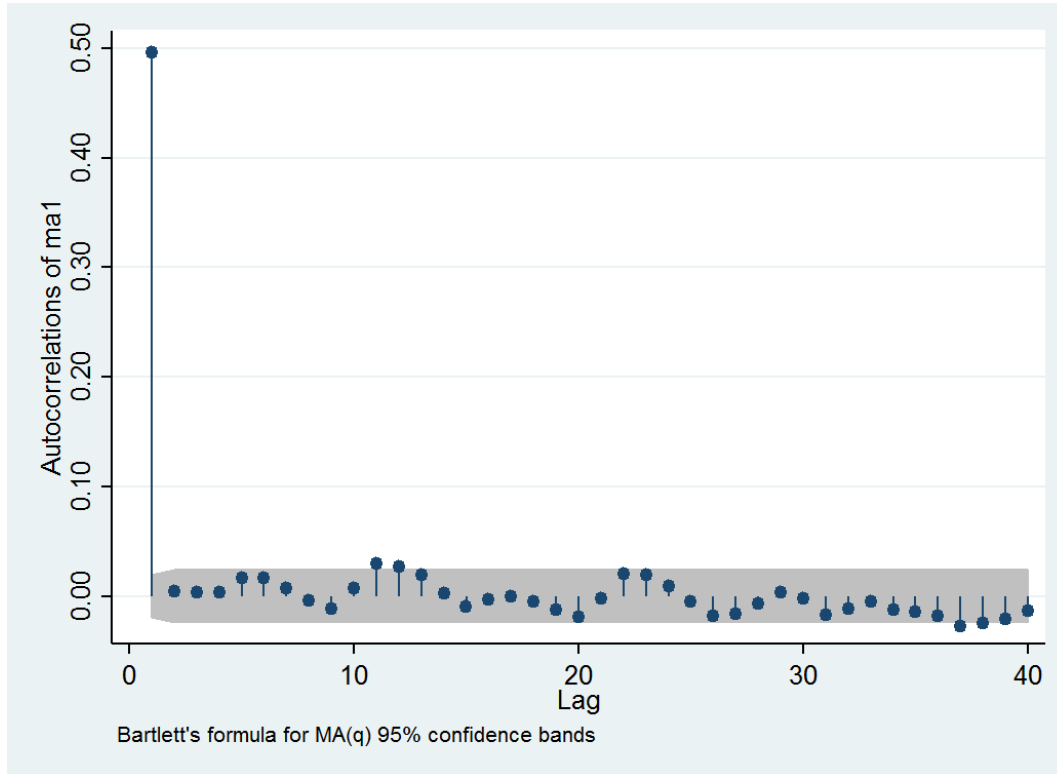


Funkcja ACF i PACF

LAG	AC	PAC	Q	Prob>Q	-1	0	1	-1	0	1
					[Autocorrelation]			[Partial Autocor]		
1	0.6258	0.6258	3917.8	0.0000		-----		-----		
2	0.5215	0.2135	6638.5	0.0000		-----		-----		
3	0.3926	0.0039	8180.3	0.0000		-----		-----		
4	0.3061	0.0008	9117.6	0.0000		-----		-----		
5	0.2441	0.0146	9714.1	0.0000		-----		-----		
6	0.1910	0.0007	10079	0.0000		-----		-----		
7	0.1483	-0.0046	10299	0.0000		-----		-----		
8	0.1166	0.0011	10436	0.0000		-----		-----		
9	0.0897	-0.0020	10516	0.0000		-----		-----		
10	0.0792	0.0158	10579	0.0000		-----		-----		

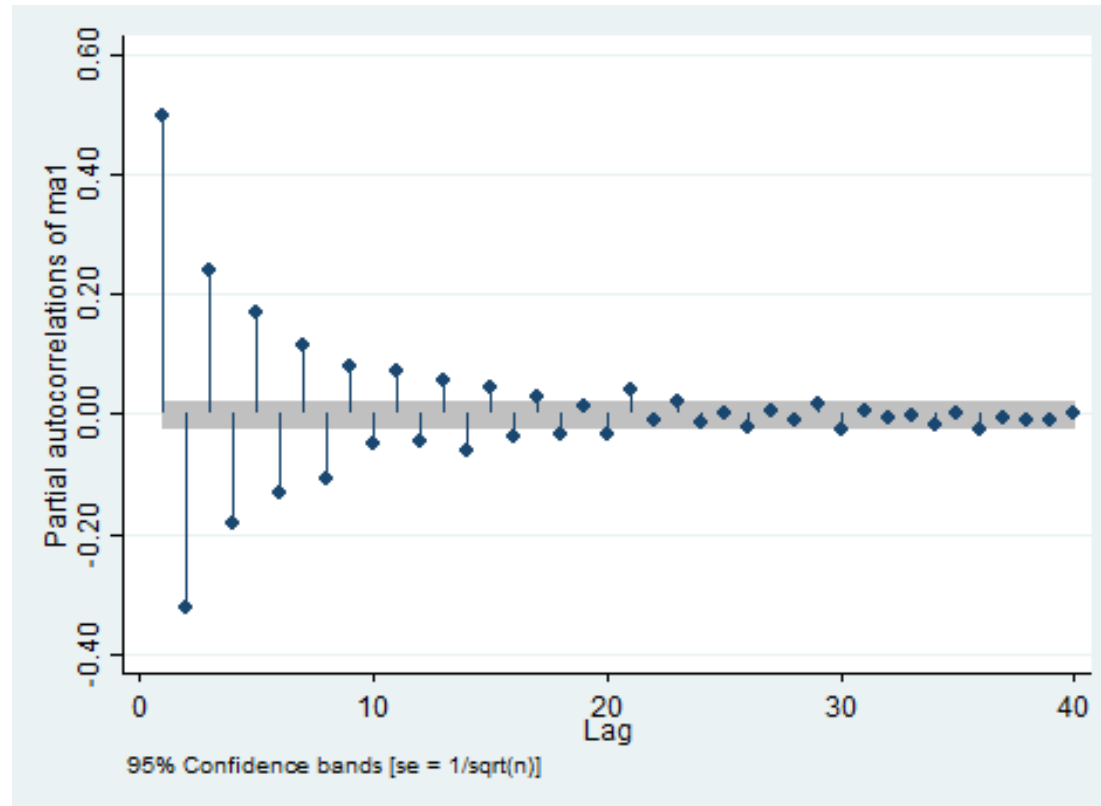
Funkcja ACF

- ▶ ACF dla MA(1)



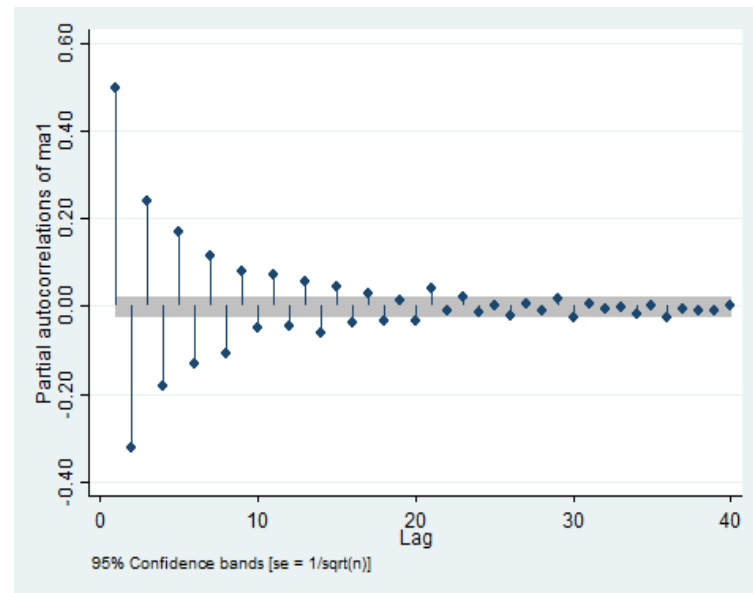
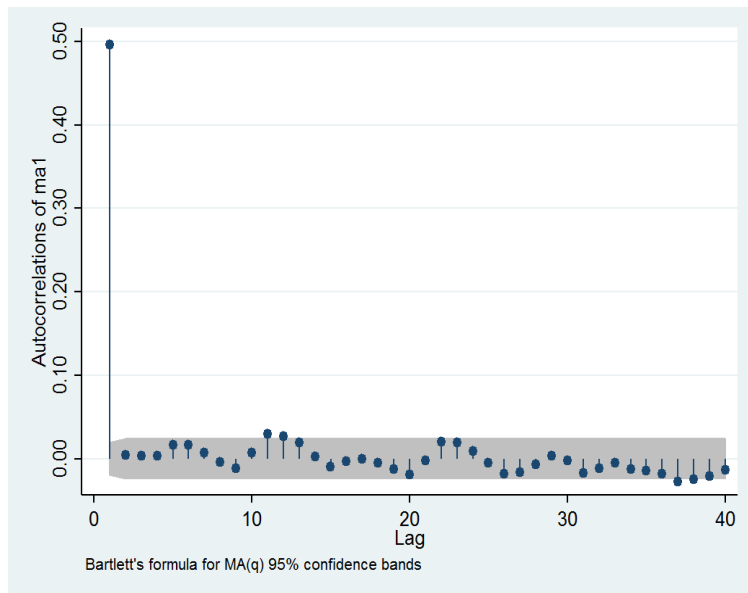
Funkcja PACF

- ▶ PACF dla MA(1)



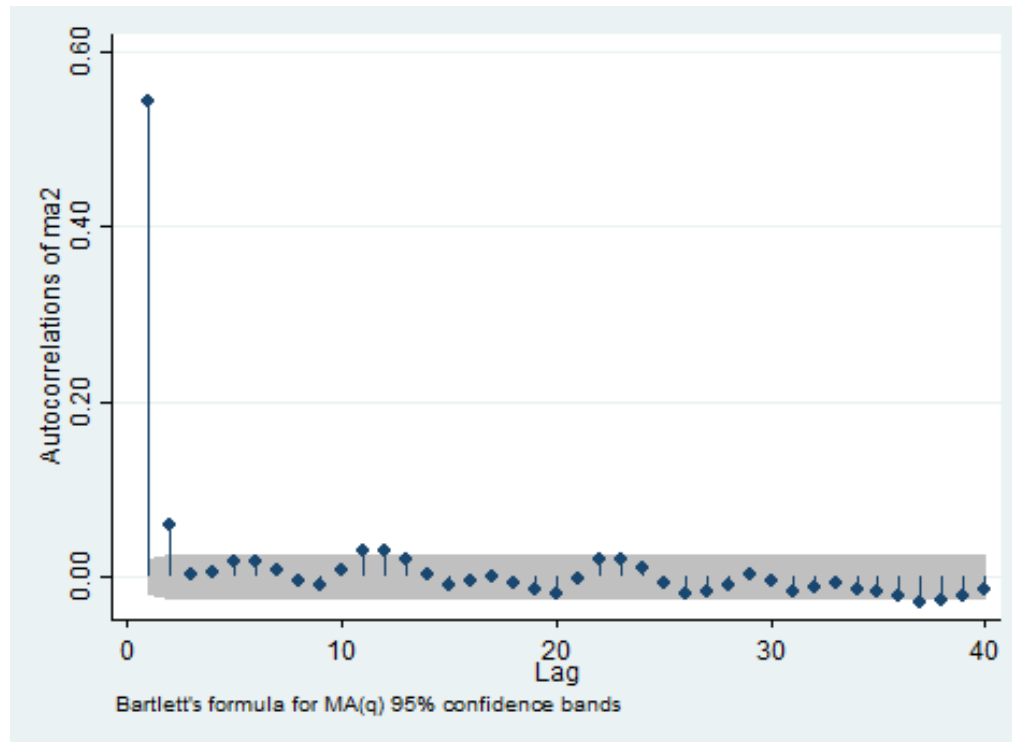
Funkcja ACF i PACF

- ▶ ACF i PACF dla MA(1)



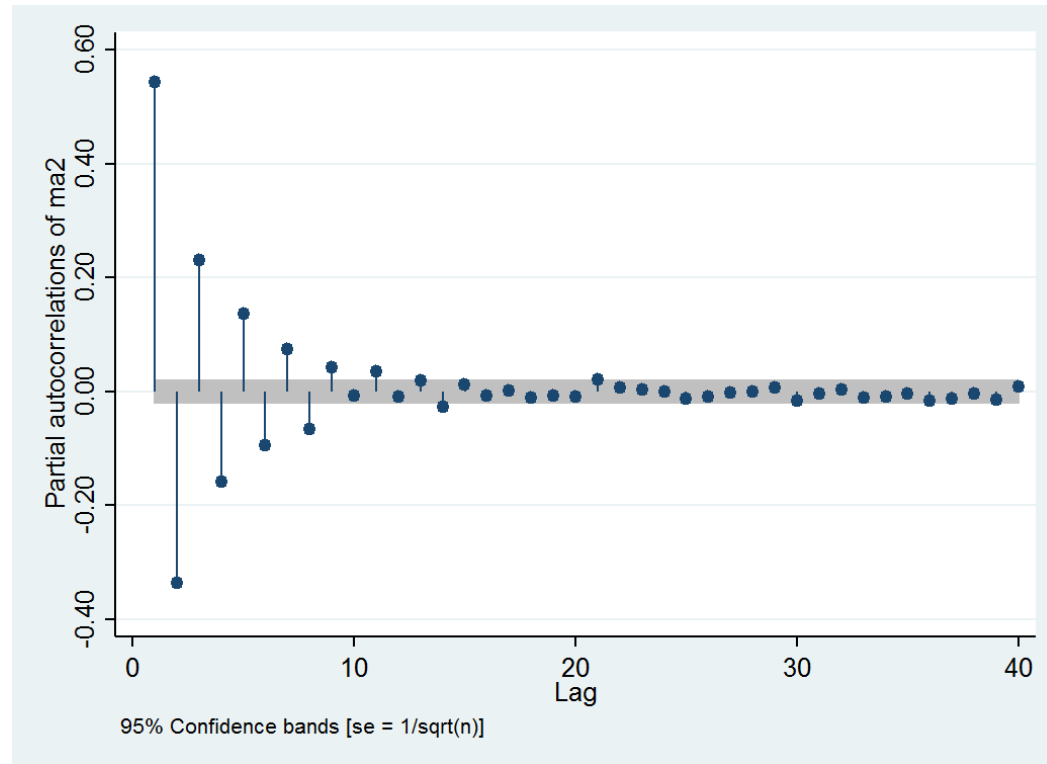
Funkcja ACF

- ▶ ACF dla MA(2)



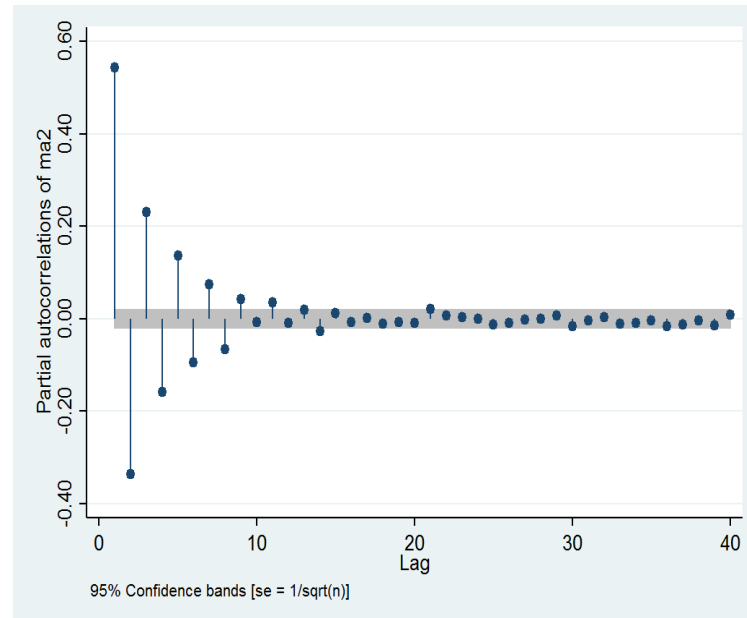
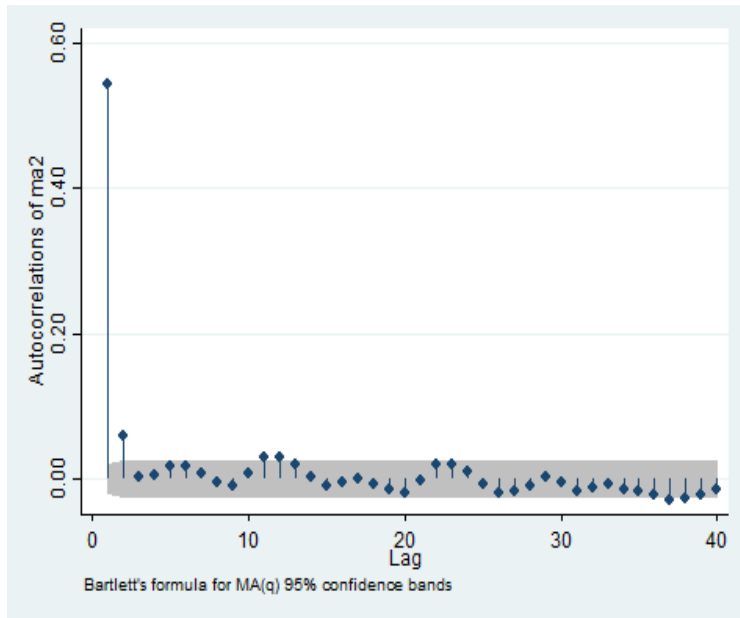
Funkcja PACF

- ▶ PACF dla MA(2)



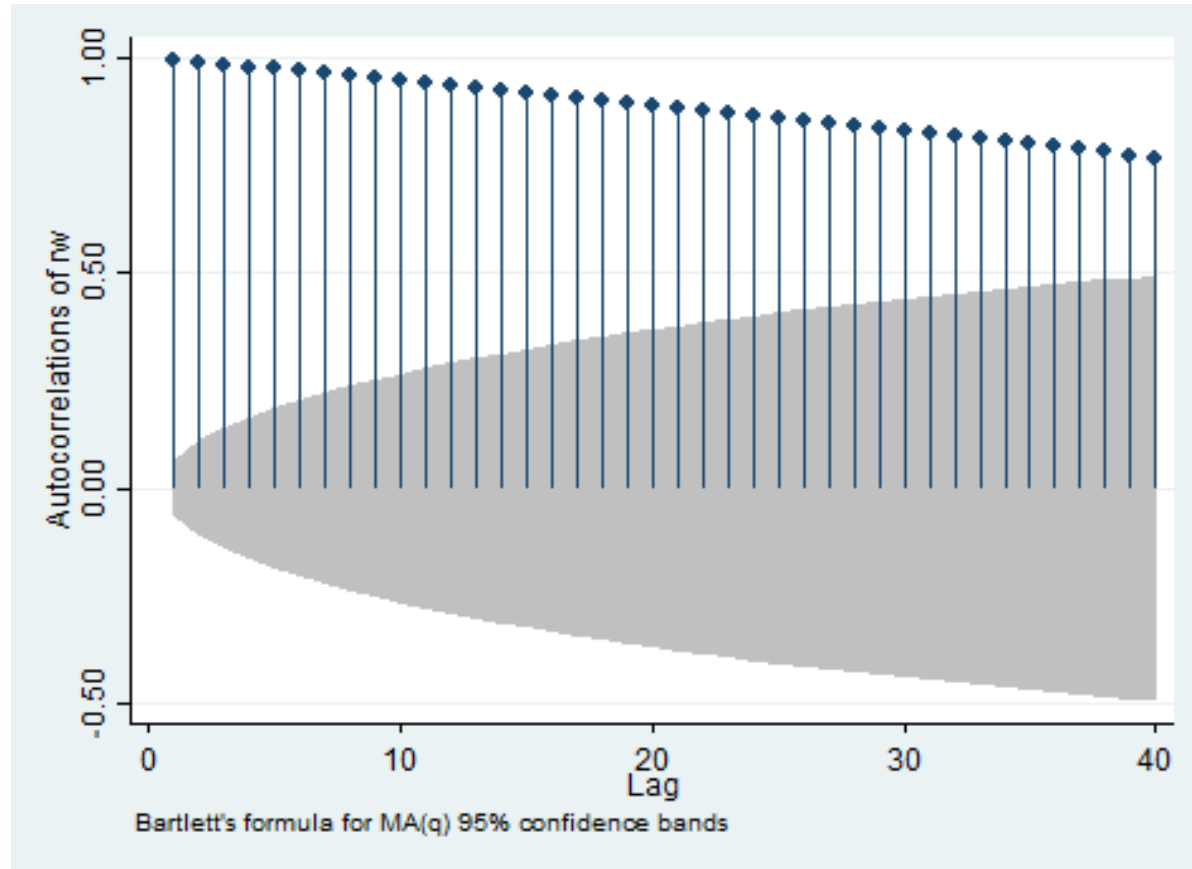
Funkcja ACF i PACF

- ▶ ACF i PACF dla MA(2)



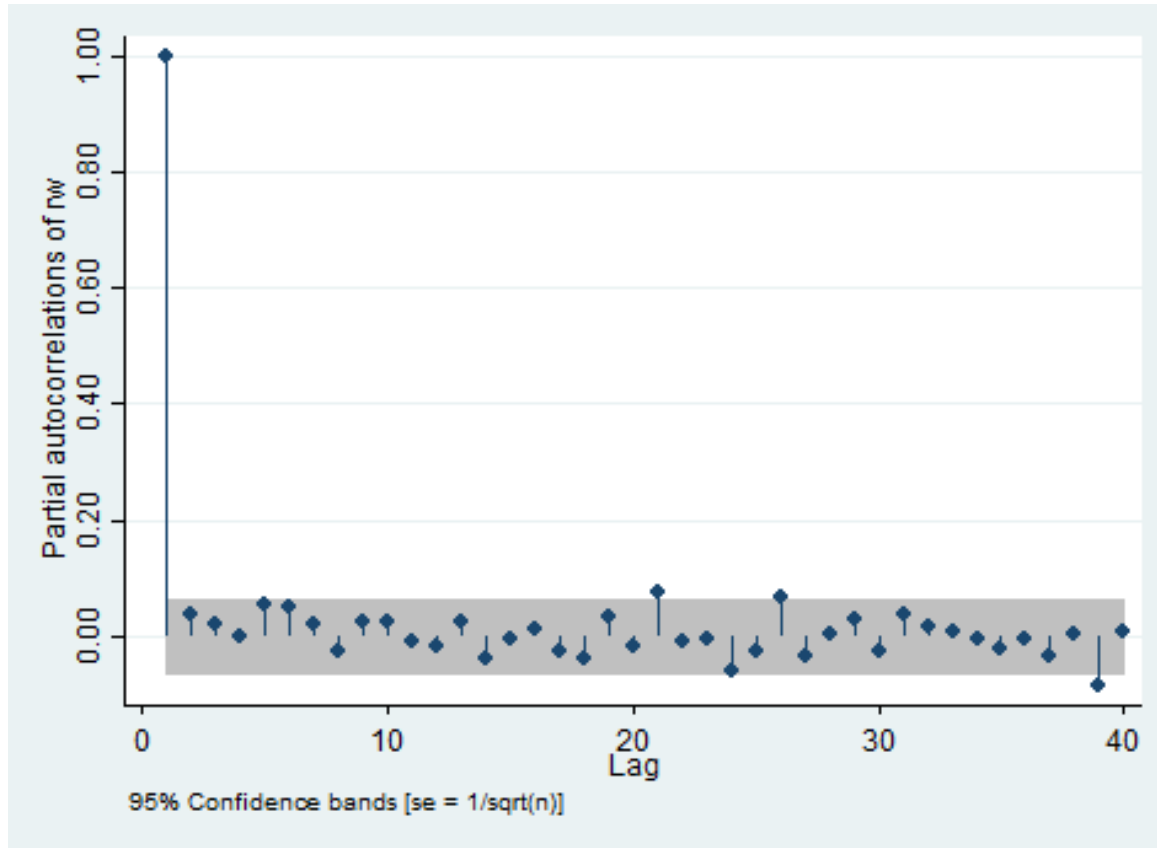
Funkcja ACF

- ▶ ACF dla błędzenia przypadkowego



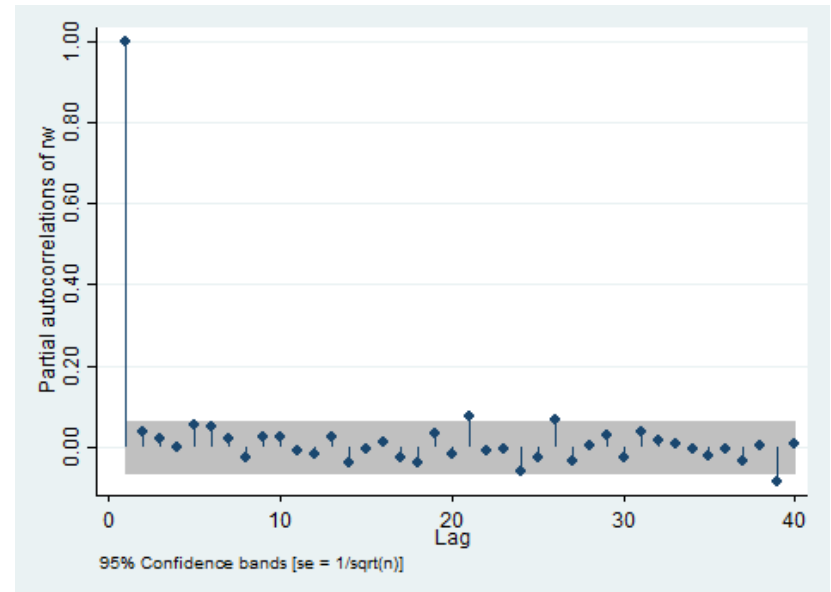
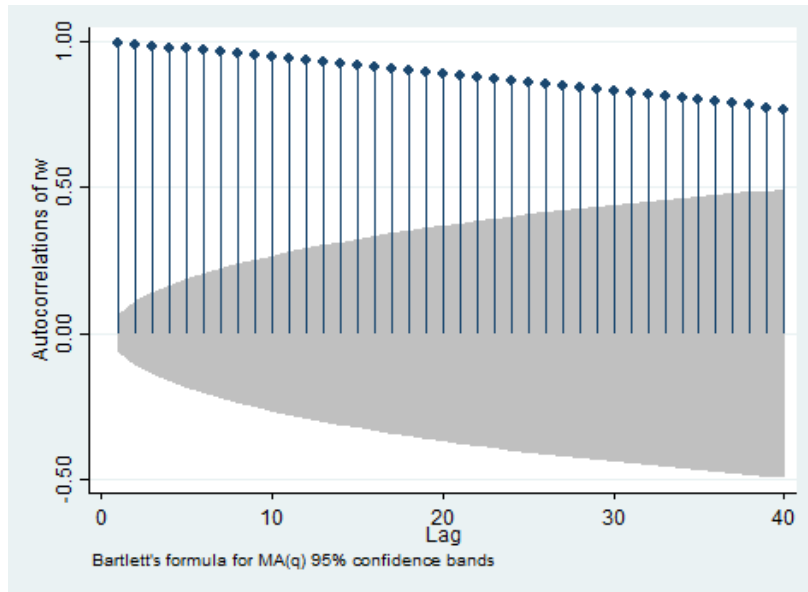
Funkcja PACF

- ▶ PACF dla błędzenia przypadkowego



Funkcja ACF i PACF

- ▶ ACF i PACF dla błędzenia przypadkowego



Funkcja ACF i PACF

LAG	AC	PAC	Q	Prob>Q	-1 0 1 [Autocorrelation]	-1 0 1 [Partial Autocor]
1	0.9941	0.9975	991.19	0.0000	-----	-----
2	0.9884	0.0369	1972	0.0000	-----	
3	0.9829	0.0208	2943	0.0000	-----	
4	0.9771	0.0006	3903.5	0.0000	-----	
5	0.9717	0.0528	4854.3	0.0000	-----	
6	0.9664	0.0503	5795.8	0.0000	-----	
7	0.9614	0.0228	6728.5	0.0000	-----	
8	0.9562	-0.0262	7652	0.0000	-----	
9	0.9508	0.0242	8566	0.0000	-----	
10	0.9456	0.0264	9470.9	0.0000	-----	

Modele ARMA

	ACF	PACF
AR(p)	Funkcja ACF wygasa do 0	Dla PACF istotnych jest p pierwszych opóźnień
MA(q)	Dla ACF istotnych jest q pierwszych opóźnień	Funkcja PACF wygasa do 0
ARMA(p,q)	Dla ACF istotnych jest q pierwszych opóźnień i wygasa ona do 0	Dla PACF istotnych jest p pierwszych opóźnień i wygasa ona do 0

Modele ARMA

- ▶ Uwaga: w przypadku zmiennej niestacjonarnej funkcja ACF nie wygasa a wartości tej funkcji pozostają duże.

Modele ARMA

- ▶ Identyfikacja: metoda od ogólnego do szczególnego.
- ▶ Identyfikacja: kryteria informacyjne.

Modele ARMA

- ▶ Estymacja
- ▶ Diagnostyka: testowanie czy reszty z modelu są białym szumem. Wykorzystujemy do tego test Ljung-Boxa:

$$Q = T(T + 2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{T - k} \sim \chi_m^2$$

- ▶ Hipoteza zerowa: reszty są białym szumem.

Plan wykładu

- ▶ 1. Proces AR
- ▶ 2. Proces MA
- ▶ 3. Model ARMA
- ▶ 4. Prognozowanie za pomocą modelu ARMA

Prognozowanie za pomocą model ARMA

$$y_{T+1} = \mu + \alpha_1 y_T + \dots + \alpha_p y_{T-p+1} + \varepsilon_{T+1} + \theta_1 \varepsilon_T + \dots + \theta_q \varepsilon_{T-q+1}$$

- ▶ T to ostatni okres, dla którego mamy obserwacje w próbkce.
- ▶ Po oszacowaniu parametrów można sformułować prognozę:

$$\hat{y}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 \hat{y}_T + \hat{\alpha}_2 \hat{y}_{T-1} \dots + \hat{\alpha}_p \hat{y}_{T-p+1} + \hat{\theta}_1 e_T + \hat{\theta}_2 \hat{e}_{T-1} \dots + \hat{\theta}_q e_{T-q+1}$$

$$\hat{y}_{T+2} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 \hat{y}_{T+1} + \dots + \hat{\alpha}_p \hat{y}_{T-p+2} + \hat{\theta}_2 e_T + \dots + \hat{\theta}_q e_{T-q+2}$$

Prognozowanie za pomocą model ARMA

- ▶ W ten sposób możemy rekurencyjnie uzyskać prognozę \hat{y}_{T+s}
- ▶ Jednak prognozowanie dla dłuższego horyzontu czasowego w przypadku modeli ARMA(p,q) nie ma sensu ponieważ prognozy zbiegają do równowagi długookresowej.
- ▶ Sensowne jest prognozowanie na $\max\{p,q\}$ okresów.

Pytania teoretyczne

1. Podać ogólną postać modelu ARMA(p,q).
2. Jaką hipotezę badamy za pomocą testu Ljunga-Boxa?
3. Wyjaśnić w jaki sposób tworzone są prognozy za pomocą modelu ARMA(p,q).
4. Wyjaśnić w jaki sposób używa się funkcji ACF i PACF do ustalania parametrów p i q w modelu ARMA(p,q).

Dziękuję za uwagę