Binarne zmienne zależne cz. I

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników

2. **Liniowy model prawdopodobieństwa**
   a) Interpretacja współczynników
3. **Probit**
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka
4. **Logit**
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników

2. Liniowy model prawdopodobieństwa
   a) Interpretacja współczynników

3. Probit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

4. Logit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania

Binarne zmienne zależne

- zmienne zero-jedynkowe nazywane są także **zmiennymi binarnymi**
- zmienna zero-jedynkowa opisuje stan w jakim znajdują się badane obiekty
  - przy kodowaniu zmiennej przyjmuje się konwencję:
    - 0 - porażka
    - 1 - sukces
- czym jest sukces a czym porażka zależy od badania

Binarne zmienne zależne

- w modelach dla zmiennych binarnych wyjaśniamy, za pomocą zmiennych niezależnych, prawdopodobieństwa stanów

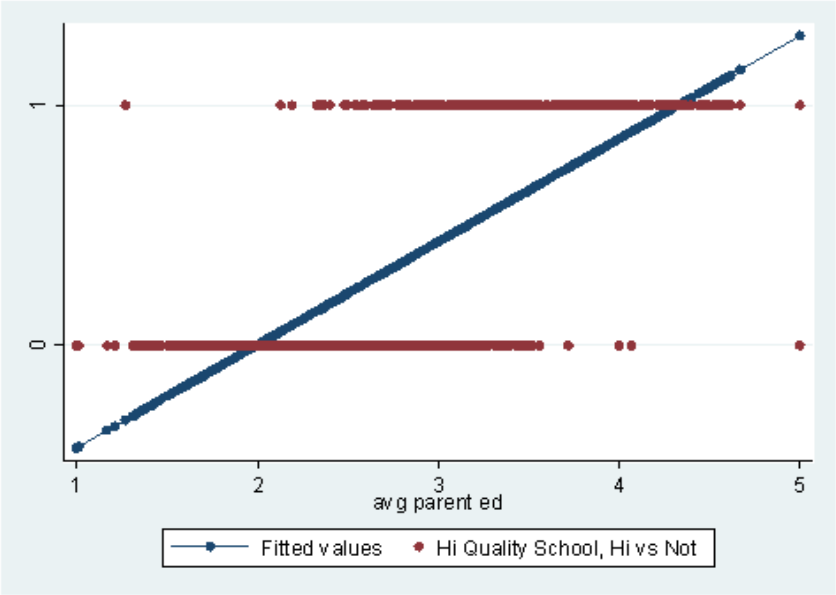
- aby sformułować model musimy opisać **prawdopodobieństwa zdarzeń** dla poszczególnych obserwacji na największym poziomie ogólności:

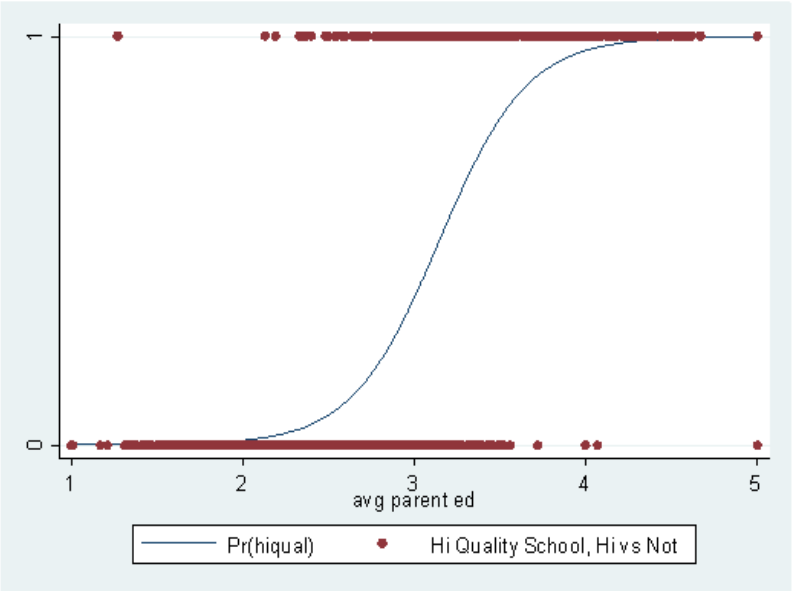
$$\Pr\left(y_i \middle| \boldsymbol{x}_i\right) = \begin{cases} 1 - p(\boldsymbol{x}_i) & \text{dla} \quad y_i = 0 \\ p(\boldsymbol{x}_i) & \text{dla} \quad y_i = 1 \end{cases}$$

  - gdzie $p(x_i)$ opisuje zależność prawdopodobieństwa sukcesu od wielkości zmiennych niezależnych x_i
    - W jaki sposób powinniśmy dobrać funkcje $p(x_i)$, która opisuje zależność prawdopodobieństwa sukcesu od wielkości zmiennych niezależnych x_i?
    - Oczywiście, funkcja ta powinna mieć wartości w przedziale [0,1].

Binarne zmienne zależne

- modele dla zmiennych binarnych nie są modelami liniowymi





Interpretacja ekonomiczna

- y^*
  - jest użytecznością lub zyskiem netto
  - jest nieobserwowalne
  - jest losowe

$$y^* = x_i\beta + \varepsilon_i$$

gdzie ε ma symetryczną dystrybuantę z $E(\varepsilon) = 0$

- Parametry modelu szacujemy na postawie obserwowalnych wyborów y, na które zdeterminowane są nieobserwowalnym y^*.

$$y_i = \begin{cases} 0 \;\; dla\; y_i^* \leq 0 \\ 1 \;\; dla\; y_i^* > 0 \end{cases}$$

Interpretacja ekonomiczna

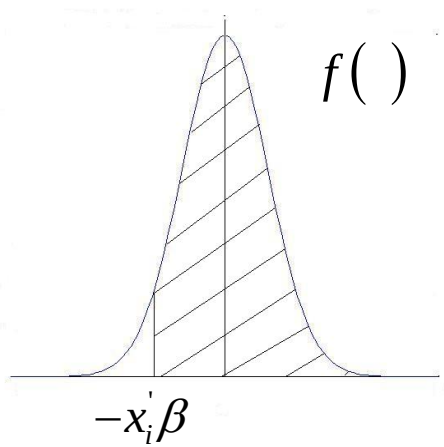
- Prawdopodobieństwo sukcesu:

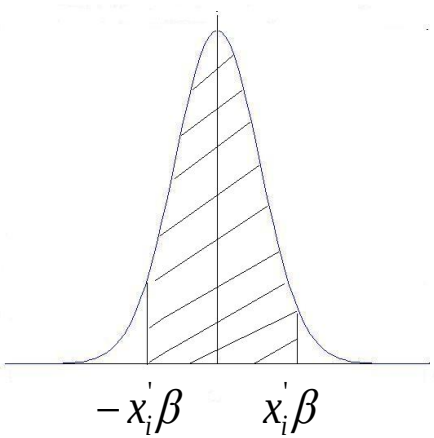
$$Pr\{y_i = 1\} = Pr\{y_i^* > 0\} = Pr\{x_i\beta + \varepsilon_i > 0\} = Pr\{\varepsilon_i > -x_i\beta\} =$$

$$= Pr\{\varepsilon_i < x_i\beta\} = F(x_i\beta)$$

  - gdzie $F\ (\cdot)$ jest dystrybuantą ε

Np.





Interpretacja współczynników

- Wartość oczekiwana zmiennej zależnej w modelu dla zmiennej binarnej jest równa:

$$E(y_i|\, x_i) \;=\; 0 \cdot \;[1 \;-\; F\;(x_i\beta)] \;+\; 1 \cdot F\;(x_i\beta) \;=\; F\;(x_i\beta)$$

- Ponieważ przyjęta jest konwencja, ze 1 oznacza sukces a 0 porażkę więc, wartość oczekiwana zmiennej zależnej w modelu dla zmiennej binarnej równa jest prawdopodobieństwu sukcesu.

- Efekt cząstkowy jest równy:

$$\frac{\partial E(y|x)}{\partial x_k} = \frac{\partial F(x_i\beta)}{\partial x_k} = f(\boldsymbol{x_i}\beta)\beta_k$$

Interpretacja współczynników

- Efekt cząstkowy możemy interpretować jako **wpływ jednostkowej zmiany zmiennej niezależnej na wielkość prawdopodobieństwa sukcesu**.

- Wielkość efektu cząstkowego zależy od wielkości x_i dla którego jest on liczony.
  - Zazwyczaj efekty cząstkowe liczymy **dla średnich wartości zmiennych niezalenych**.

- W przypadku zmiennych zerojedynkowych efekt krańcowy wyznaczamy jako różnice miedzy prawdopodobieństwem sukcesu dla wartości 1 i 0.

Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników

2. Liniowy model prawdopodobieństwa
   a) Interpretacja współczynników

3. Probit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

4. Logit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania

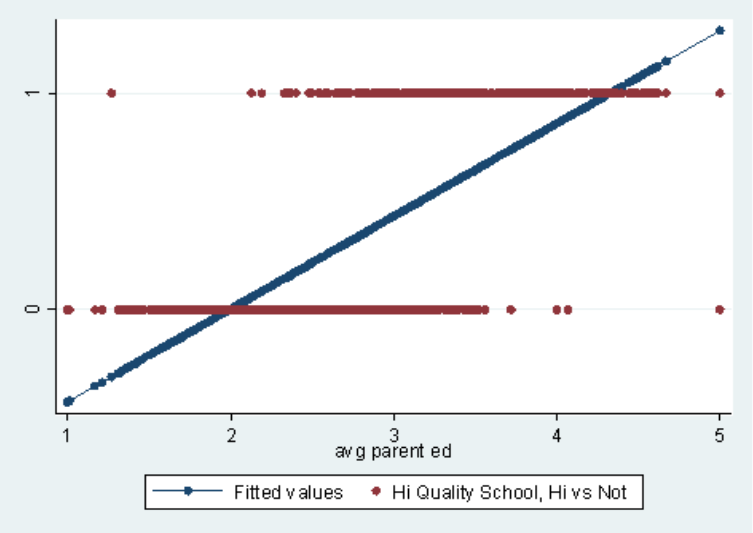
Liniowy model prawdopodobieństwa (LPM)

- rozpatrujemy różne formy funkcyjne dla zależności między prawdopodobieństwem sukcesu a wielkością zmiennych objaśniających

- najprostszy model ⟶ **liniowy model prawdopodobieństwa (LPM)**

$$p(x_i) = F(x_i\beta) = x_i\beta$$

- gdzie:
  - $p(x_i)$ - prawdopodobieństwo sukcesu
  - $F(\quad)$ - dystrybuanta



Liniowy model prawdopodobieństwa (LPM)

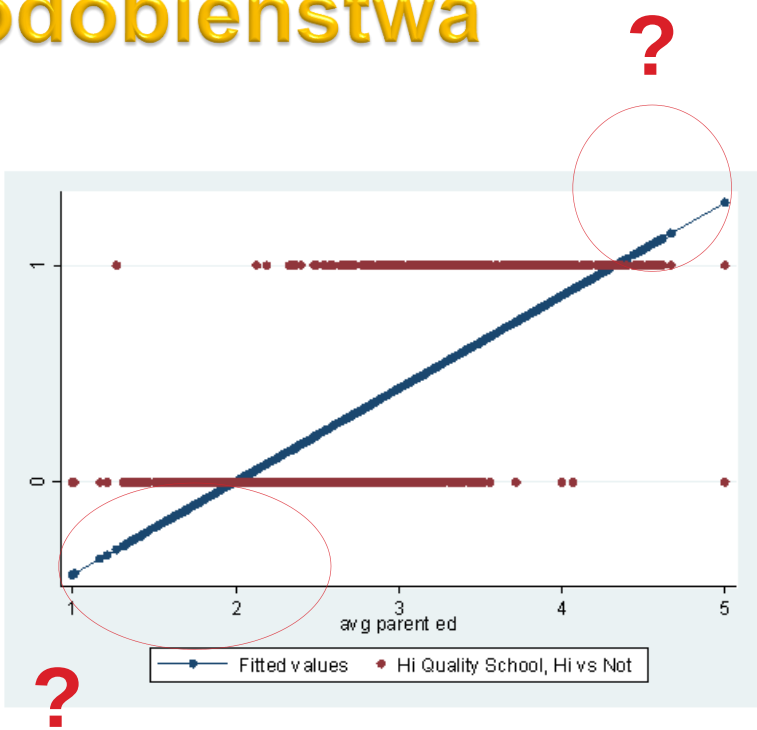
- liniowy w tym sensie, że warunkowa wartość oczekiwana jest dana funkcją liniową:

$$E\left(y_i \mid x_i\right) = x_i \beta$$

- Liniowy model prawdopodobieństwa sprowadza się do estymacji Metodą Najmniejszych Kwadratów równania:

$$y_i = x_i \beta + \varepsilon_i$$

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)



- zalety LPM:

a) łatwy do wyestymowania
b) współczynniki = efekty cząstkowe

- wady LPM:

a) wartości dopasowane spoza [0;1] ⟶ nieinterpretowalne (*prawdopodobieństwo sukcesu*)

b) Błędy losowe w równaniu regresji będą heteroskedastyczne

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)

- problemu z punktu a) nie da się w prosty sposób rozwiązać
- w przypadku heteroscedastyczności stosujemy $UMNK$ lub odporne macierze wariancji i kowariancji

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)

Source	SS	df	MS
Model	69.3608203	18	3.85337891
Residual	985.092737	4858	.202777426
Total	1054.45356	4876	.216253806

Number of obs =	4877
F(18, 4858) =	19.00
Prob > F =	0.0000
R-squared =	0.0658
Adj R-squared =	0.0623
Root MSE =	.45031

y	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
stateur	.0181616	.0030859	5.89	0.000	.0121119	.0242113
statemb	.0012594	.0002039	6.18	0.000	.0008597	.001659
age	.004297	.0007798	5.51	0.000	.0027682	.0058258
tenure	.0054326	.0012124	4.48	0.000	.0030558	.0078095
slack	.1260833	.0142071	8.87	0.000	.098231	.1539356
abol	-.0082705	.0248301	-0.33	0.739	-.0569486	.0404077
seasonal	.0560999	.035809	1.57	0.117	-.014102	.1263017
nwhite	.0193939	.0186845	1.04	0.299	-.0172361	.056024
school12	-.0096339	.0167537	-0.58	0.565	-.0424787	.023211
male	-.0388263	.0177931	-2.18	0.029	-.0737088	-.0039437
smsa	-.0352754	.0140208	-2.52	0.012	-.0627624	-.0077883
married	.0500559	.0161317	3.10	0.002	.0184306	.0816813
dkids	-.0187618	.0167546	-1.12	0.263	-.0516085	.0140848
dykids	.0358303	.0195493	1.83	0.067	-.0024952	.0741557
yrdispl	-.0130974	.0030688	-4.27	0.000	-.0191138	-.0070811
rr	.6062438	.3842868	1.58	0.115	-.1471322	1.35962
rr2	-1.010374	.4811835	-2.10	0.036	-1.953711	-.0670365
head	-.0386771	.0165195	-2.34	0.019	-.0710629	-.0062914
_cons	.1279247	.0882052	1.45	0.147	-.0449975	.3008469

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)

a) Test White'a na heteroscedastyczność

```
imtest, white
White's test for Ho: homoskedasticity
         against Ha: unrestricted heteroskedasticity

         chi2(173)     =    458.73
         Prob > chi2   =    0.0000
```

b) Test Breucha-Pagana:

```
hettest, rhs

Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity
         Ho: Constant variance
         Variables: stateur statemb age tenure slack abol seasonal nwhite
                  school12 male smsa married dkids dykids yrdispl rr rr2 head

         chi2(18)      =    84.68
         Prob > chi2   =   0.0000
```

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)

```
Linear regression                                      Number of obs =    4877
                                                       F( 18,  4858) =   20.77
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.0658
                                                       Root MSE      =  .45031
------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stateur |   .0181616   .0029548     6.15   0.000     .0123688    .0239544
     statemb |   .0012594   .0002038     6.18   0.000     .0008599    .0016588
         age |    .004297   .0007668     5.60   0.000     .0027936    .0058004
      tenure |   .0054326   .0011656     4.66   0.000     .0031476    .0077176
       slack |   .1260833   .0142299     8.86   0.000     .0981863    .1539802
        abol |  -.0082705   .0259736    -0.32   0.750    -.0591906    .0426496
    seasonal |   .0560999   .0373422     1.50   0.133    -.0171078    .1293075
      nwhite |   .0193939   .0184205     1.05   0.292    -.0167186    .0555064
    school12 |  -.0096339    .016992    -0.57   0.571    -.0429459    .0236782
        male |  -.0388263   .0178936    -2.17   0.030    -.0739059   -.0037466
        smsa |  -.0352754   .0139739    -2.52   0.012    -.0626705   -.0078803
     married |   .0500559   .0163331     3.06   0.002     .0180358    .0820761
       dkids |  -.0187618   .0168417    -1.11   0.265    -.0517793    .0142556
      dykids |   .0358303   .0196643     1.82   0.069    -.0027207    .0743813
     yrdispl |  -.0130974   .0030852    -4.25   0.000    -.0191459   -.0070489
          rr |   .6062438   .3957315     1.53   0.126     -.169569    1.382057
         rr2 |  -1.010374   .4951863    -2.04   0.041    -1.981163   -.0395846
        head |  -.0386771   .0166618    -2.32   0.020    -.0713418   -.0060125
       _cons |   .1279247   .0882096     1.45   0.147    -.0450061    .3008555
------------------------------------------------------------------------------
```

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)

```
test abol seasonal nwhite school12 dkids dykids rr

 ( 1)  abol = 0
 ( 2)  seasonal = 0
 ( 3)  nwhite = 0
 ( 4)  school12 = 0
 ( 5)  dkids = 0
 ( 6)  dykids = 0
 ( 7)  rr = 0

       F(  7,  4858) =    1.50
            Prob > F =    0.1621
```

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)

```
Linear regression                                      Number of obs =    4877
                                                       F( 11,  4865) =   32.57
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.0637
                                                       Root MSE      =  .45048
------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stateur |   .0181462   .0029481     6.16   0.000     .0123665    .0239259
     statemb |    .001258   .0002022     6.22   0.000     .0008617    .0016543
         age |   .0039118   .0007047     5.55   0.000     .0025304    .0052933
      tenure |   .0055123   .0011489     4.80   0.000     .0032601    .0077646
       slack |   .1247634   .0131511     9.49   0.000     .0989813    .1505456
        male |  -.0395063   .0176193    -2.24   0.025    -.0740481   -.0049644
        smsa |  -.0344193   .0139264    -2.47   0.013    -.0617214   -.0071172
     married |   .0500746   .0142392     3.52   0.000     .0221593      .07799
     yrdispl |  -.0128674   .0030768    -4.18   0.000    -.0188994   -.0068355
         rr2 |  -.2527459   .0860807    -2.94   0.003     -.421503   -.0839887
        head |  -.0376671   .0161592    -2.33   0.020    -.0693465   -.0059878
       _cons |   .2532724    .048884     5.18   0.000     .1574377     .349107
------------------------------------------------------------------------------
```

Liniowy model prawdopodobieństwa (LPM)

- **Wada LMP - wartości dopasowane nie znajdują się w przedziale [0,1]**

```
predict wartosci_dop, xb
list y  wartosci_dop if  wartosci_dop > 1 | wartosci_dop < 0
```

	y	wartosci_dop
48.	1	1.03823
159.	1	1.202082
595.	1	1.077022
842.	1	1.037514
1194.	1	1.097218
1487.	1	1.014822
1738.	1	1.0229
1789.	1	1.060014
1936.	1	1.090258
1940.	1	1.054053
1970.	1	1.092681
2166.	1	1.05898
2537.	1	1.100604
2598.	1	1.082886
2607.	1	1.01655
2620.	1	1.003613
2623.	1	1.062682
2710.	1	1.028138
2964.	1	1.048522
3260.	1	1.011603
3916.	1	1.065829
4150.	1	1.035251
4203.	1	1.015945
4312.	1	1.026004
4763.	1	1.019101

LPM - Interpretacja współczynników

- w liniowym modelu prawdopodobieństwa interpretuje się współczynniki
- interpretacja:

a) **dla zmiennych objaśniających ciągłych:** wpływ jednostkowej zmiany zmiennej niezależnej na wielkość prawdopodobieństwa sukcesu

b) **dla zmiennych objaśniających zero-jedynkowych:** różnica między prawdopodobieństwem sukcesu dla zmiennej zero-jedynkowej równej 0 i równej 1

Liniowy model prawdopodobienstwa (LPM)

```
Linear regression                                      Number of obs =    4877
                                                       F( 11,  4865) =   32.57
                                                       Prob > F      =  0.0000
                                                       R-squared     =  0.0637
                                                       Root MSE      =  .45048
------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stateur |   .0181462   .0029481     6.16   0.000     .0123665    .0239259
     statemb |    .001258   .0002022     6.22   0.000     .0008617    .0016543
         age |   .0039118   .0007047     5.55   0.000     .0025304    .0052933
      tenure |   .0055123   .0011489     4.80   0.000     .0032601    .0077646
       slack |   .1247634   .0131511     9.49   0.000     .0989813    .1505456
        male |  -.0395063   .0176193    -2.24   0.025    -.0740481   -.0049644
        smsa |  -.0344193   .0139264    -2.47   0.013    -.0617214   -.0071172
     married |   .0500746   .0142392     3.52   0.000     .0221593      .07799
     yrdispl |  -.0128674   .0030768    -4.18   0.000    -.0188994   -.0068355
         rr2 |  -.2527459   .0860807    -2.94   0.003     -.421503   -.0839887
        head |  -.0376671   .0161592    -2.33   0.020    -.0693465   -.0059878
       _cons |   .2532724    .048884     5.18   0.000     .1574377     .349107
------------------------------------------------------------------------------
```

Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników

2. Liniowy model prawdopodobieństwa
   a) Interpretacja współczynników

3. Probit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

4. Logit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania

Probit

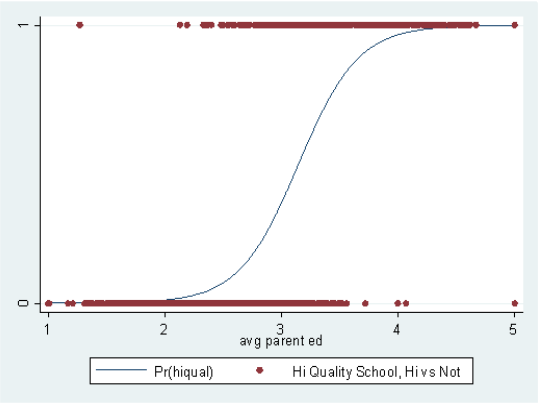
- W modelu **probitowym** zakładamy, że $F()$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego

- Założenia modelu probitowego:
  - Obserwacje są niezależne
  - Rozkład warunkowy:

$$Pr(y_i|x_i) = \begin{cases} 1 - \Phi(x_i\beta) & dla \quad y_i = 0 \\ \Phi(x_i\beta) & dla \quad y_i = 1 \end{cases}$$

$$= [1 - \Phi(x_i\beta)]^{1-y_i}\Phi(x_i\beta)^{y_i}$$

- Gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0,1)$



Probit

- Funkcja wiarygodności ma postać:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} [1 - \Phi(X_i\beta)]^{1-y_i} \Phi(X_i\beta)^{y_i}$$

- Logarytm funkcji wiarygodności będzie ma postać:

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left[(1 - y_i) \ln\left(1 - \Phi(X_i\beta)\right) + y_i ln\Phi(X_i\beta)\right]$$

Probit

```
Iteration 0:   log likelihood =  -3043.028
Iteration 1:   log likelihood = -2877.2378
Iteration 2:   log likelihood = -2876.2341
Iteration 3:   log likelihood = -2876.2339
Probit regression                                 Number of obs   =       4877
                                                  LR chi2(18)     =     333.59
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -2876.2339                       Pseudo R2       =     0.0548
------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stateur |   .0567939   .0094476     6.01   0.000      .038277    .0753108
     statemb |   .0036919   .0006066     6.09   0.000     .0025031    .0048807
         age |   .0128577    .002348     5.48   0.000     .0082556    .0174597
      tenure |   .0171165   .0038063     4.50   0.000     .0096562    .0245768
       slack |    .369949   .0423106     8.74   0.000     .2870218    .4528763
        abol |   -.027034   .0717981    -0.38   0.707    -.1677557    .1136877
    seasonal |   .1576748   .1038971     1.52   0.129    -.0459599    .3613094
      nwhite |   .0589318   .0558523     1.06   0.291    -.0505367    .1684003
    school12 |  -.0300342   .0493823    -0.61   0.543    -.1268218    .0667534
        male |  -.1135565   .0526911    -2.16   0.031    -.2168291   -.0102839
        smsa |  -.1000473    .041819    -2.39   0.017    -.1820112   -.0180835
     married |   .1492617   .0477113     3.13   0.002     .0557493     .242774
       dkids |  -.0669911   .0498136    -1.34   0.179    -.1646241    .0306418
      dykids |   .1065534   .0579546     1.84   0.066    -.0070355    .2201423
     yrdispl |  -.0379514   .0090638    -4.19   0.000    -.0557162   -.0201866
          rr |    1.81413   1.126008     1.61   0.107    -.3928044    4.021065
         rr2 |  -2.965477   1.409031    -2.10   0.035    -5.727126    -.203827
        head |   -.111508   .0487228    -2.29   0.022    -.2070029   -.0160131
       _cons |  -1.181325   .2624662    -4.50   0.000    -1.695749   -.6669005
------------------------------------------------------------------------------
```

Pytania teoretyczne

1. Co jest modelowane w przypadku jeśli zmienna zależna jest zmienna binarną (zero-jedynkową)? Wyjaśnić, jaka jest relacja między zmienną obserwowalną a ukrytą w przypadku modeli dla zmiennych binarnych i jak tę relację można uzasadnić na bazie teorii ekonomii.

2. Jakie są wady liniowego modelu prawdopodobieństwa? Odpowiedz uzasadnić.

Dziękuję za uwagę