

# **Badanie stacjonarności, modele o rozłożonych opóźnieniach i modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach**

**Stanisław Cichocki  
Natalia Nehrebecka**

Wykład 4

# Plan wykładu

- ▶ 1. Badanie stacjonarności:
  - Test Dickey-Fullera (DF)
  - Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)
  - Test KPSS
- ▶ 2. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- ▶ 3. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)

# Plan wykładu

- ▶ 1. Badanie stacjonarności:
  - Test Dickey-Fullera (DF)
  - Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)
  - Test KPSS
- ▶ 2. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- ▶ 3. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)

# Test Dickey-Fullera (DF)

- ▶ Równanie regresji:

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_0 : \rho = 0, \alpha_1 = 0$  - błądzenie przypadkowe

$H_1 : \rho \in (-2, 0)$  - model AR(1) ze stałą

# Test Dickey-Fullera (DF)

- ▶ Równanie regresji:

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_0 : \rho = 0, \alpha_2 = 0$  - błądzenie przypadkowe z dryfem

$H_1 : \rho \in (-2, 0)$  - model AR(1) z trendem liniowym

# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

- ▶ Często reszty z regresji:

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

wykazują silną autokorelację, co jest problemem.

- ▶ Rozszerzony test Dickey-Fullera (test ADF) różni się od standardowego testu DF rozszerzeniem regresji o dodatkowe elementy, których celem jest eliminacja autokorelacji reszt.

# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

- ▶ Przeprowadzamy regresję:

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

gdzie:  $\gamma_i \Delta y_{t-i}$  - rozszerzenie

- ▶ Liczbę opóźnień  $k$  dobieramy tak aby z reszt wyeliminować autokorelację.

# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

- ▶ Statystyka testowa dla testu ADF : statystyka  $t$  policzona dla oszacowania parametru przy  $y_{t-1}$
- ▶ Dla dużych prób tablice wartości krytycznych dla testu ADF są takie same jak w teście DF.
- ▶ Dla małych prób, małopróbkowe wartości krytyczne testu DF są jedynie aproksymacją prawdziwych wartości krytycznych testu ADF.



# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

- ▶ Test ADF przeprowadzamy w następujący sposób:
  1. regresja  $\Delta y_t$  na  $y_{t-1}$
  2. badamy występowanie autokorelacji za pomocą testu Breuscha-Godfrey (nie Durbina-Watsona):
    - a) jeśli autokorelacja nie występuje to porównujemy statystykę  $t$  dla  $y_{t-1}$  z wartościami krytycznymi testu ADF:
      - i. wartość statystyki jest mniejsza od wartości krytycznej - odrzucamy  $H_0$  o niestacjonarności  $y_t$  i przyjmujemy  $H_1$  o stacjonarności  $y_t$  ;

# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

ii. wartość statystyki jest większa od wartości krytycznej –  
nie ma podstaw do odrzucenia  $H_0$

b) jeśli autokorelacja występuje to dodajemy stopniowo  
rozszerzenia do momentu aż się jej pozbędziemy a następnie  
porównujemy statystykę  $t$  dla  $y_{t-1}$  z wartościami krytycznymi  
testu ADF

i. wartość statystyki jest mniejsza od wartości krytycznej  
- odrzucamy  $H_0$  o niestacjonarności  $y_t$  i przyjmujemy  $H_1$   
o stacjonarności  $y_t$  ;

# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

- ii. wartość statystyki jest większa od wartości krytycznej –  
nie ma podstaw do odrzucenia  $H_0$

# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

- ▶ W przypadku błędzenia przypadkowego:

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	999
-----+-----						
Model	.077155196	1	.077155196	F( 1, 998)	=	0.08
Residual	1000.45476	998	1.00245968	Prob > F	=	0.7815
-----+-----						
Total	1000.53191	999	1.00153345	R-squared	=	0.0001
-----						
D.rw   Coef. Std. Err. t P> t  [95% Conf. Interval]						
-----+-----						
rw						
L1.	-.0005213	.001879	-0.28	0.782	-.0042086	.003166
-----						

# Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)

- ▶ W przypadku błędzenia przypadkowego:

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags (p)		chi2	df	Prob > chi2
1		1.084	1	0.2977
2		1.477	2	0.4779
3		2.629	3	0.4524
4		2.639	4	0.6199

H0: no serial correlation

# Test KPSS

- ▶ Test KPSS (Kwiatkowski, Philips, Schmidt, Shin) testuje hipotezę zerową o stacjonarności zmiennej.
- ▶ Oparty jest na następującym modelu:

$$y_t = \delta + \zeta_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\zeta_t = \zeta_{t-1} + u_t$$

$$u_t \sim IID(0, \sigma_u^2)$$

# Test KPSS

$H_0 : \sigma_u^2 = 0$  - zmienna  $y_t$  jest stacjonarna

$H_1 : \sigma_u^2 > 0$  - zmienna  $y_t$  jest niestacjonarna

- Hipotezę zerową odrzucamy gdy statystyka testowa  $>$  wartości krytycznej.
- Statystyka testowa dla testu KPSS zawsze  $>0$ .

# Test KPSS

## ▶ Test KPSS dla białego szumu:

Critical values for  $H_0: x$  is level stationary

10%: 0.347    5% : 0.463    2.5%: 0.574    1% : 0.739

Lag order	Test statistic
0	.0629
1	.0656
2	.064
3	.0623
4	.0607
5	.0594
6	.0582
7	.0582
8	.0584
9	.059
10	.0596



# Test KPSS

## ▶ Test KPSS dla białego szumu:

Critical values for H0: x is level stationary

10%: 0.347 5% : 0.463 2.5%: 0.574 1% : 0.739

Lag order	Test statistic
0	.0629
1	.0656
2	.064
3	.0623
4	.0607
5	.0594
6	.0582
7	.0582
8	.0584
9	.059
10	.0596

# Test KPSS

## ▶ Test KPSS dla błędzenia przypadkowego

Critical values for  $H_0$ :  $rw$  is level stationary

10%: 0.347    5% : 0.463    2.5%: 0.574    1% : 0.739

Lag order	Test statistic
0	55.9
1	28
2	18.7
3	14.1
4	11.3
5	9.42
6	8.09
7	7.09
8	6.31
9	5.69
10	5.18

# Test KPSS

## ▶ Test KPSS dla błędzenia przypadkowego

Critical values for H0: rw is level stationary

10%: 0.347 5% : 0.463 2.5%: 0.574 1% : 0.739

Lag order	Test statistic
0	55.9
1	28
2	18.7
3	14.1
4	11.3
5	9.42
6	8.09
7	7.09
8	6.31
9	5.69
10	5.18

# Plan wykładu

- ▶ 1. Badanie stacjonarności:
  - Test Dickey-Fullera (DF)
  - Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)
  - Test KPSS
- ▶ 2. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- ▶ 3. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)

# Modele o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ W modelach o rozłożonych opóźnieniach (Distributed Lags) wpływ zmiennych niezależnych na zmienną zależną jest rozłożony w czasie.

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \dots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

Jeśli  $x_t$  jest nielosowe i spełnione są odpowiednie założenia dotyczące składnika losowego (jakie?) to model spełnia założenia KMRL.

# Modele o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Interpretacja parametrów:  $\beta_p$  - zmiana  $y_t$  jaka nastąpi jeśli zmieni się  $x$  sprzed  $p$  okresów a dla wszystkich pozostałych okresów  $x$  pozostanie niezmiennione.
- ▶ Taka interpretacja jest niepraktyczna stąd stosuje się różne mnożniki.

# Modele o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Mnożnik bezpośredni (impact multiplier): mierzy wielkość oczekiwanej, natychmiastowej reakcji  $y_t$  na zmianę  $x_t$  o  $\Delta x$ .

$$\begin{aligned} E(y_t + \Delta y) &= \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \dots + \beta_p x_{t-p} \\ &= \mu + \beta_0 x_t + \dots + \beta_p x_{t-p} + \beta_0 \Delta x \\ &= E(y_t) + \beta_0 \Delta x \end{aligned}$$




# Modele o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Mnożnik skumulowany: mierzy wielkość oczekiwanej reakcji  $y_t$  na zmianę  $x$  o  $\Delta x$  w kolejnych  $\tau$  okresach.

$$\begin{aligned} E(y_t + \Delta y) &= \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \dots + \beta_\tau(x_{t-\tau} + \Delta x) \\ &+ \beta_{\tau+1}x_{t-\tau+1} + \dots + \beta_px_{t-p} \end{aligned}$$

$$= E(y_t) + \left( \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i \right) \Delta x$$


$$\beta_\tau = \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i$$



# Modele o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Mnożnik długookresowy (long-run multiplier): mierzy wielkość oczekiwanej reakcji  $y_t$  na zmianę wszystkich przeszłych wartości  $x$  o  $\Delta x$ .
- ▶ Można go policzyć jako mnożnik skumulowany dla  $\tau \rightarrow \infty$ .

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s = \beta$$

# Modele o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Średnie opóźnienie reakcji  $y_t$  na zmiany  $x$ .

$$\bar{w} = \sum_{s=1}^{\infty} s \frac{\beta_s}{\beta}$$

Należy pamiętać, że dla modelu w którym pojawia się więcej niż jedna zmienna niezależna wielkości mnożników i średnich opóźnień liczone są osobno dla każdej z tych zmiennych.

# Modele o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Przykład:

$$\begin{aligned} \textit{konsumpcja}_t & \\ &= \mu + 0,4\textit{dochód}_t + 0,3\textit{dochód}_{t-1} \\ &+ 0,2\textit{dochód}_{t-2} \end{aligned}$$

Mnożnik bezpośredni:  $\beta_0 = 0,4$

Mnożnik długookresowy:  $\beta = 0,4 + 0,3 + 0,2 = 0,9$

Średnie opóźnienie:  $\bar{w} = 1 * \frac{0,4}{0,9} + 2 * \frac{0,3}{0,9} + 3 * \frac{0,2}{0,9} = 1,778$

# Plan wykładu

- ▶ 1. Badanie stacjonarności:
  - Test Dickey-Fullera (DF)
  - Rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF)
  - Test KPSS
- ▶ 2. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- ▶ 3. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)

# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ W modelach autoregresyjnych o rozłożonych opóźnieniach (Autoregressive Distributed Lags) występują dodatkowo opóźnione zmienne zależne.

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \mu + \beta_0 x_t + \dots + \beta_s x_{t-s} + \varepsilon_t$$

# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Stan równowagi długookresowej (steady state): jest to stan, w którym wartość oczekiwana zmiennej zależnej pozostaje stała w czasie, o ile tylko nie zmieniają się zmienne niezależne.

$$y^* = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p})$$
$$x^* = x_t = x_{t-1} = \dots = x_{t-s}$$

# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Stan równowagi długookresowej:

$$(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p)y^* = \mu + x^*\beta_0 + x^*\beta_1 + \dots + x^*\beta_s$$

$$\text{oznaczając: } \mu^* = \frac{\mu}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p} \quad \beta = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

$$\text{otrzymujemy: } y^* = \mu^* + x^*\beta$$

# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Mnożnik bezpośredni: mierzy wielkość oczekiwanej, natychmiastowej reakcji  $y_t$  na zmianę  $x_t$  o  $\Delta x$ .

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

$\beta_0$





# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Mnożnik długookresowy: mierzy wielkość oczekiwanej reakcji  $y_t$  na zmianę wszystkich przeszłych wartości  $x$  o  $\Delta x$ .

$$y^* = \mu^* + x^* \beta$$

$$y^* + E(\Delta y) = \mu^* + (x^* + \Delta x) \beta$$

$$\beta = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_s}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}$$

# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Przykład:

$$\begin{aligned} \logkonsumpcja_t &= 0,69\logkonsumpcja_{t-1} \\ &+ 0,12\logkonsumpcja_{t-2} - 0,4 \\ &+ 0,76\logdochód_t - 0,65\logdochód_{t-1} \\ &- 0,074\logdochód_{t-2} \end{aligned}$$

Mnożnik bezpośredni:  $\beta_0 = 0,76$

Mnożnik długookresowy:  $\beta = \frac{0,76 - 0,65 - 0,074}{1 - 0,69 - 0,12} = 0,19$

# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ W przypadku gdy w modelu występują opóźnione zmienne zależne nie można utrzymać założenia, że zmienne niezależne są nielosowe. Dlaczego?
- ▶ W przypadku gdy zmienne niezależne są losowe można dowieść zgodność estymatora MNK tylko wtedy, gdy  $Cov(x_t, \varepsilon_t) = 0$ .
- ▶ Powyższe założenie nie jest spełnione w modelach ADL, jeśli wystąpi autokorelacja składnika losowego.

# Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- ▶ Stąd powinniśmy dążyć do eliminacji autokorelacji w modelach ADL poprzez dodawania opóźnionych zmiennych zależnych do modelu lub poprzez modelowanie sposobu w jaki są skorelowane błędy losowe.
- ▶ Do wykrywania autokorelacji w modelach ADL stosujemy test Breuscha-Godfrey'a a nie test Durbina-Watsona. Dlaczego?

# Pytania teoretyczne

1. Opisać procedurę testowania stacjonarności za pomocą rozszerzonego testu Dickey-Fullera (ADF).
2. Opisać jak dla różnych modeli trendów formułujemy hipotezę zerową i alternatywną w rozszerzonym teście Dickey-Fullera (ADF).
3. Na czym polega najważniejsza różnica między testowaniem stacjonarności za pomocą testu ADF i KPSS?
4. Podać ogólną postać modeli DL i ADL.
5. Podać wzory na mnożnik bezpośredni i długookresowy w modelach DL i ADL i podać ich interpretację.
6. Podać wzór na średnie opóźnienie w modelu DL i podać jego interpretację.

# Pytania teoretyczne

7. Pokazać jak można policzyć stan równowagi długookresowej w modelu ADL. Odpowiedź uzasadnić.
8. Jakie założenie musi spełniać błąd losowy w modelu ADL, aby estymator MNK w tym modelu był zgodny? Za pomocą jakiego testu można zweryfikować to założenie?

**Dziękuję za uwagę**