Binarne zmienne zależne cz. II

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników
2. Liniowy model prawdopodobieństwa
   a) Interpretacja współczynników
3. **Probit**
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka
4. Logit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

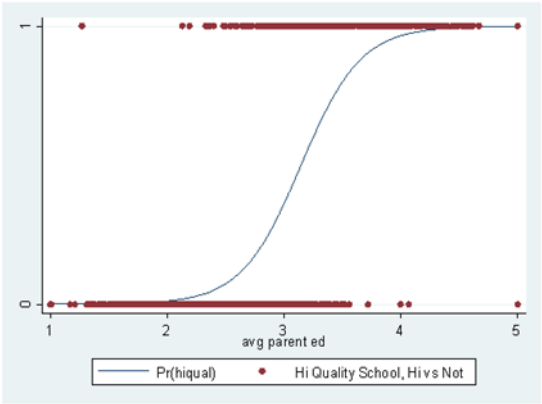
Probit

- W modelu **probitowym** zakładamy, że $F()$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego

- Założenia modelu probitowego:
  - Obserwacje są niezależne
  - Rozkład warunkowy:

$$Pr(y_i|x_i) = \begin{cases} 1 - \Phi(x_i\beta) & dla \quad y_i = 0 \\ \Phi(x_i\beta) & dla \quad y_i = 1 \end{cases}$$

$$= [1 - \Phi(x_i\beta)]^{1-y_i}\Phi(x_i\beta)^{y_i}$$



- Gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0,1)$

Probit

- Funkcja wiarygodności ma następującą postać:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} [1 - \Phi(x_i\beta)]^{1-y_i} \Phi(x_i\beta)^{y_i}$$

- Logarytm funkcji wiarygodności będzie miał postać:

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left[(1 - y_i) \ln\left(1 - \Phi(x_i\beta)\right) + y_i ln\Phi(x_i\beta) \right]$$

Probit

- Wartość oczekiwana:

$$E(y_i|x_i) = 1 \cdot \Phi(x_i\beta) + 0 \cdot (1 - \Phi(x_i\beta)) = \Phi(x_i\beta)$$

- Efekt cząstkowy dla zmiennej x_k:

$$\frac{\partial E(y|x)}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi(x_i\beta)}{\partial x_k} = \phi(\boldsymbol{x_i}\beta)\beta_k$$

Probit - Interpretacja współczynników

- nie interpretuje się współczynników w modelu probitowym
- interpretuje się efekty cząstkowe (*krańcowe*):

a) dla zmiennych objaśniających ciągłych:
   - wpływ jednostkowej zmiany zmiennej niezależnej na wielkość prawdopodobieństwa sukcesu;
     - efekty cząstkowe dla zmiennych objaśniających ciągłych liczymy zwykle dla średnich wartości tych zmiennych (efekty cząstkowe zależą od wielkości zmiennych objaśniających)

b) dla zmiennych objaśniających zero-jedynkowych:
   - różnica między prawdopodobieństwem sukcesu dla zmiennej zero-jedynkowej równej 0 i równej 1, przy pozostałych zmiennych ustalonych na poziomie średnich

Probit - Interpretacja współczynników

- znak efektu cząstkowego dla danej zmiennej jest taki sam jak znak współczynnika przy tej zmiennej

- możemy zatem interpretować znaki przy współczynnikach:
  - dodatni znak ⇒ zmienna wpływa dodatnio na prawdopodobieństwo sukcesu
  - ujemny znak ⇒ zmienna wpływa ujemnie na prawdopodobieństwo sukcesu

Probit

```
Probit regression                                 Number of obs     =      4,877
                                                  LR chi2(11)       =     322.58
                                                  Prob > chi2       =     0.0000
Log likelihood = -2881.7371                       Pseudo R2         =     0.0530

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stateur |   .0566916   .0094341     6.01   0.000     .0382012     .075182
     statemb |    .003684   .0006012     6.13   0.000     .0025057    .0048624
         age |   .0117275   .0021911     5.35   0.000     .0074331    .0160219
      tenure |   .0173067   .0037642     4.60   0.000      .009929    .0246844
       slack |   .3661648   .0395464     9.26   0.000     .2886553    .4436743
        male |  -.1139709   .0519568    -2.19   0.028    -.2158042   -.0121375
        smsa |  -.0974368    .041559    -2.34   0.019     -.178891   -.0159826
     married |   .1441728   .0415553     3.47   0.001     .0627259    .2256198
     yrdispl |  -.0371914   .0090398    -4.11   0.000    -.0549092   -.0194736
         rr2 |  -.7020753   .2523342    -2.78   0.005    -1.196641   -.2075092
        head |  -.1101841   .0473191    -2.33   0.020    -.2029279   -.0174403
       _cons |  -.8093586   .1530845    -5.29   0.000    -1.109399   -.5093185
------------------------------------------------------------------------------
```

Probit – Interpretacja efektów cząstkowych (krańcowych)

```
Marginal effects after probit
      y  = Pr(y) (predict)
         =  .69402302
------------------------------------------------------------------------------
variable |      dy/dx    Std. Err.      z    P>|z|  [    95% C.I.   ]       X
---------+--------------------------------------------------------------------
 stateur |    .019886       .0033    6.02   0.000   .013409  .026363   7.51103
 statemb |   .0012923      .00021    6.13   0.000   .000879  .001705    180.66
     age |   .0041137      .00077    5.36   0.000   .002608  .005619     36.13
  tenure |   .0060708      .00132    4.60   0.000   .003485  .008657   5.66414
   slack*|   .1273458      .01356    9.39   0.000   .100772   .15392   .476112
    male*|  -.0393392      .01763   -2.23   0.026  -.073892 -.004786   .764199
    smsa*|   -.033908      .01434   -2.36   0.018  -.062018 -.005798   .652655
 married*|   .0510228      .01482    3.44   0.001   .021973  .080073   .632766
 yrdispl |  -.0130458      .00317   -4.12   0.000  -.019259 -.006832   5.20361
     rr2 |   -.246271      .08851   -2.78   0.005  -.419752  -.07279    .20344
    head*|  -.0382403      .01624   -2.36   0.019  -.070064 -.006417   .680541
------------------------------------------------------------------------------
```

Probit – Interpretacja efektów cząstkowych (krańcowych)

- Efekty cząstkowe dla mężczyzny, w wieku 35 lat, który jest żonaty i jest głową rodziny;
- reszta zmiennych na poziomie średniej z próby

```
. mfx, at(male = 1 age = 35 married = 1 head = 1)
Marginal effects after probit
      y  = Pr(y) (predict)
         =  .68612838
------------------------------------------------------------------------------
variable |      dy/dx    Std. Err.      z    P>|z|  [    95% C.I.   ]       X
---------+--------------------------------------------------------------------
 stateur |    .0201081      .00334    6.02   0.000    .013557   .02666   7.51103
 statemb |    .0013067      .00021    6.09   0.000    .000886  .001727    180.66
     age |    .0041597      .00079    5.28   0.000    .002614  .005705        35
  tenure |    .0061386      .00133    4.60   0.000    .003525  .008752   5.66414
   slack*|    .1287766      .01379    9.34   0.000    .101746  .155807   .476112
    male*|    -.039244      .01744   -2.25   0.024   -.073428  -.00506         1
    smsa*|   -.0342977      .01454   -2.36   0.018   -.062802 -.005794   .652655
 married*|    .0527807      .01536    3.44   0.001    .022675  .082886         1
 yrdispl |   -.0131915      .00322   -4.10   0.000   -.019499 -.006884   5.20361
     rr2 |   -.2490205      .09009   -2.76   0.006   -.425593 -.072448    .20344
    head*|   -.0379799      .01599   -2.38   0.018   -.069321 -.006639         1
------------------------------------------------------------------------------
(*) dy/dx is for discrete change of dummy variable from 0 to 1
```

Probit – Interpretacja efektów cząstkowych (krańcowych)

- Efekty cząstkowe dla kobiety w wieku 35 lat, która nie jest zamężna i nie jest głową rodziny;
- reszta zmiennych na poziomie średniej z próby

```
mfx, at(male = 0 age = 35 married = 0 head = 0)
Marginal effects after probit
      y  = Pr(y) (predict)
         =  .71392498
------------------------------------------------------------------------------
variable |      dy/dx    Std. Err.      z    P>|z|  [    95% C.I.   ]       X
---------+--------------------------------------------------------------------
 stateur |    .0192814      .00325    5.93   0.000    .01291  .025653   7.51103
 statemb |     .001253       .0002    6.16   0.000   .000854  .001652    180.66
     age |    .0039886      .00075    5.32   0.000   .002519  .005458        35
  tenure |    .0058862      .00128    4.59   0.000   .003375  .008398   5.66414
   slack*|    .1234544      .01338    9.23   0.000   .097227  .149681   .476112
    male*|   -.0399497       .0182   -2.19   0.028  -.075629 -.004271         0
    smsa*|   -.0328496      .01385   -2.37   0.018  -.059993 -.005706   .652655
 married*|    .0469316      .01354    3.47   0.001   .020403   .07346         0
 yrdispl |   -.0126492      .00307   -4.12   0.000  -.018664 -.006634   5.20361
     rr2 |   -.2387825      .08433   -2.83   0.005  -.404059 -.073506    .20344
    head*|   -.0385862       .0168   -2.30   0.022  -.071517 -.005656         0
------------------------------------------------------------------------------
```

Plan zajęć

1. Wstęp
   a) Binarne zmienne zależne
   b) Interpretacja ekonomiczna
   c) Interpretacja współczynników

2. Liniowy model prawdopodobieństwa
   a) Interpretacja współczynników
3. Probit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka
4. Logit
   a) Interpretacja współczynników
   b) Miary dopasowania
   c) Diagnostyka

Miary dopasowania

- Często stosowaną miarą dopasowania jest:

$$R^2_{McFadden} = 1 - \frac{l(\beta)}{l(\beta_R)}$$

  - gdzie β_R zawiera jedynie stałą

- $pseudo - R^2$ spełnia

$$0 \leq R^2_{McFadden} \leq 1$$

- $pseudo - R^2$ nie można jednak w pełni ściśle interpretować jako procent zmienności wyjaśnionej przez model.

Probit

```
. probit y  stateur statemb age tenure slack male smsa married  yrdispl  rr2 head

Iteration 0:   log likelihood =  -3043.028
Iteration 1:   log likelihood = -2882.6368
Iteration 2:   log likelihood = -2881.7372
Iteration 3:   log likelihood = -2881.7371

Probit regression                                 Number of obs   =       4877
                                                  LR chi2(11)     =     322.58
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -2881.7371                       Pseudo R2       =     0.0530
------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stateur |   .0566916   .0094341     6.01   0.000     .0382012     .075182
     statemb |    .003684   .0006012     6.13   0.000     .0025057    .0048624
         age |   .0117275   .0021911     5.35   0.000     .0074331    .0160219
      tenure |   .0173067   .0037642     4.60   0.000      .009929    .0246844
       slack |   .3661648   .0395464     9.26   0.000     .2886553    .4436743
        male |  -.1139709   .0519568    -2.19   0.028    -.2158042   -.0121375
        smsa |  -.0974368    .041559    -2.34   0.019     -.178891   -.0159826
     married |   .1441728   .0415553     3.47   0.001     .0627259    .2256198
     yrdispl |  -.0371914   .0090398    -4.11   0.000    -.0549092   -.0194736
         rr2 |  -.7020753   .2523342    -2.78   0.005    -1.196641   -.2075092
        head |  -.1101841   .0473191    -2.33   0.020    -.2029279   -.0174403
       _cons |  -.8093586   .1530845    -5.29   0.000    -1.109399   -.5093185
------------------------------------------------------------------------------
```

Miary dopasowania

- W przypadku $pseudo - R^2$ istnieje problem związany z tym, iż miara ta zawsze rośnie wraz z dodawaniem zmiennych do modelu.

$$\bar{R}^2_{McFadden} = 1 - \frac{l(\beta) - \boldsymbol{K}}{l(\beta_R)}$$

  - Gdzie
  - β_R zawiera jedynie stałą;
  - K jest liczbą parametrów w modelu.

Miary dopasowania

Measures of Fit for probit of y

Log-Lik Intercept Only:	-3043.028	Log-Lik Full Model:	-2881.737
D(4865):	5763.474	LR(11):	322.582
		Prob > LR:	0.000
McFadden's R2:	**0.053**	**McFadden's Adj R2:**	**0.049**
Maximum Likelihood R2:	0.064	Cragg & Uhler's R2:	0.090
McKelvey and Zavoina's R2:	0.110	Efron's R2:	0.067
Variance of y*:	1.124	Variance of error:	1.000
Count R2:	0.699	Adj Count R2:	0.048

Miary dopasowania

- Dla modeli dla zmiennych binarnych zależnych można zdefiniować $pseudo - R^2$ inne niż $pseudo - R^2_{McFadden}$, które są bliższe definicji R^2 w MNK.

- W $KMRL$ R^2 można zapisać jako:

$$R^2 = \frac{ESS}{ESS + RSS} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 + \tilde{\sigma}^2}$$

  - gdzie $\tilde{\sigma}^2$ jest estymatorem MNW wariancji składnika losowego
  - $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i^2$

Miary dopasowania

- Analogiczną miarę dopasowania można zdefiniować dla binarnej zmiennej zależnej.
- $pseudo - R^2$ będzie mierzyło udział wariancji wartości dopasowanych w całkowitej wariancji $zmiennej\ ukrytej$.

$$R^2_{McKelvey,\,Zavoina} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i^* - \bar{\hat{y}}^*)^2}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i^* - \bar{\hat{y}}^*)^2 + \tilde{\sigma}^2}$$

  - Gdzie:
  - $\tilde{\sigma}^2$ jest estymatorem MNW wariancji składnika losowego;
  - $\hat{y}_i^* = \boldsymbol{x}\tilde{\beta}$ jest oszacowaniem z modelu dla wielkości zmiennej ukrytej.
- $pseudo - R^2\ McKelveya\ i\ Zavoiny$ **opisuje procent wyjaśnienia, jaki uzyskaliśmy w modelu dla zmiennej ukrytej y_i^*, gdyby była ona bezpośrednio obserwowalna.**

Miary dopasowania

- W modelu probitowym

$$R^2_{McKelvey,\,Zavoina} = \frac{ESS}{ESS+TSS} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{y}_i^* - \bar{\hat{y}}^*\right)^2}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{y}_i^* - \bar{\hat{y}}^*\right)^2 + \mathbf{1}}$$

- gdzie:
  - N - liczba obserwacji w próbie,
  - $\bar{\hat{y}}^*$ - średnia wartość dopasowana zmiennej ukrytej y_i^*.

Miary dopasowania

Measures of Fit for probit of y

Log-Lik Intercept Only:	-3043.028	Log-Lik Full Model:	-2881.737
D(4865):	5763.474	LR(11):	322.582
		Prob > LR:	0.000
McFadden's R2:	0.053	McFadden's Adj R2:	0.049
Maximum Likelihood R2:	0.064	Cragg & Uhler's R2:	0.090
McKelvey and Zavoina's R2:	**0.110**	Efron's R2:	0.067
Variance of y*:	1.124	Variance of error:	1.000
Count R2:	0.699	Adj Count R2:	0.048

Miary dopasowania

- tablica klasyfikacyjna:

		Zaobserwowane		
Prognozowane		0	1	**Razem**
	0	n_{00}	n_{01}	$n_{00} + n_{01}$
	1	n_{10}	n_{11}	$n_{10} + n_{11}$
	Razem	$n_{00} + n_{10}$	$n_{01} + n_{11}$	n

Miary dopasowania

- standardowo punktem granicznym jest $p^* = 0.5$ dla poprawnie zakwalifikowanego wyniku

Probit model for y

Classified	True D	True ~D	Total
+	**3197**	1330	**4527**
-	138	**212**	**350**
Total	**3335**	**1542**	4877

Classified + if predicted Pr(D) >= .5

Miary dopasowania

- na podstawie tablicy klasyfikacyjnej można ustalić na ile model trafnie przewiduje sukcesy i porażki

- $liczebnościowe\ \ R^2$:

$$R^2_{liczebnościowe} = \frac{n_{00} + n_{11}}{n_{00} + n_{11} + n_{10} + n_{01}}$$

Miary dopasowania

- wielkość $liczebnościowego\ R^2$ może być myląca ⟶
  w przypadku zmiennej binarnej można zawsze uzyskać **co najmniej 50%** trafności przewidywań prognozując dla wszystkich obserwacji wartość y_i, która jest najczęściej obserwowana w próbie

- $skorygowane\ liczebnościowe\ R^2$:

$$\bar{R}^2_{liczebnościowe} = \frac{n_{00} + n_{11} - n_{max}}{n_{00} + n_{11} + n_{10} + n_{01} - n_{max}}$$

- Gdzie:
  - n_{max} - liczba obserwacji dla zdarzenia (*sukces/porażka*), którą obserwowano częściej

Miary dopasowania

- $skorygowane\ liczebnościowe\ \ R^2$
  - $\boldsymbol{zawsze\ <= 1,}$ ale
  - $> \mathbf{0}$ tylko wtedy, gdy udział prawidłowo przewidzianych zdarzeń przekracza udział zdarzenia, które było najczęściej obserwowane w próbie

- $\boldsymbol{skorygowane\ liczebnościowe\ R^2}$: jest to „procent” prawidłowych przewidywań uzyskany poprzez zastosowanie w modelu zmiennych objaśniających

Miary dopasowania

Measures of Fit for probit of y

Log-Lik Intercept Only:	-3043.028	Log-Lik Full Model:	-2881.737
D(4865):	5763.474	LR(11):	322.582
		Prob > LR:	0.000
McFadden's R2:	0.053	McFadden's Adj R2:	0.049
Maximum Likelihood R2:	0.064	Cragg & Uhler's R2:	0.090
McKelvey and Zavoina's R2:	0.110	Efron's R2:	0.067
Variance of y*:	1.124	Variance of error:	1.000
Count R2:	**0.699**	**Adj Count R2:**	**0.048**

Dziękuję za uwagę