Modele o rozłożonych opóźnieniach i modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

Stanisław Cichocki
Natalia Nehrebecka

Wykład 4

Plan wykładu

- 1. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- 2. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
- 3. Analiza przyczynowości

Plan wykładu

- 1. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- 2. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
- 3. Analiza przyczynowości

Modele o rozłożonych opóźnieniach

- W modelach o rozłożonych opóźnieniach (Distributed Lags) wpływ zmiennych niezależnych na zmienną zależną jest rozłożony w czasie.

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \cdots + \beta_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

Jeśli x_t jest nielosowe i spełnione są odpowiednie założenia dotyczące składnika losowego (jakie?) to model spełnia założenia KMRL.

Modele o rozłożonych opóźnieniach

- Interpretacja parametrów: β_p - zmiana y_t jaka nastąpi jeśli zmieni się x sprzed p okresów a dla wszystkich pozostałych okresów x pozostanie niezmienione.

- Taka interpretacja jest niepraktyczna stąd stosuje się różne mnożniki.

Modele o rozłożonych opóźnieniach

- Mnożnik bezpośredni (impact multiplier): mierzy wielkość oczekiwanej, natychmiastowej reakcji y_t na zmianę x_t o Δx.

$$E(y_t + \Delta y) = \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \cdots + \beta_p x_{t-p}$$
$$= \mu + \beta_0 x_t + \cdots + \beta_p x_{t-p} + \beta_0 \Delta x$$
$$= E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

$$\beta_0$$

Modele o rozłożonych opóźnieniach

- Mnożnik skumulowany: mierzy wielkość oczekiwanej reakcji y_t na zmianę x o Δx w kolejnych τ okresach.

$$
\begin{aligned}
&E(y_t + \Delta y) \\
&= \mu + \beta_0(x_t + \Delta x) + \cdots + \beta_\tau(x_{t-\tau} + \Delta x) \\
&+ \beta_{\tau+1}x_{t-\tau+1} + \cdots + \beta_p x_{t-p} \\
&= E(y_t) + \left(\sum_{i=0}^{\tau} \beta_i\right) \Delta x
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$\beta_\tau = \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i$$

Modele o rozłożonych opóźnieniach

- Mnożnik długookresowy (long-run multiplier): mierzy wielkość oczekiwanej reakcji y_t na zmianę wszystkich przeszłych wartości x o Δx.

- Można go policzyć jako mnożnik skumulowany dla $\tau \rightarrow \infty$.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s = \beta$$

Modele o rozłożonych opóźnieniach

- Średnie opóźnienie reakcji y_t na zmiany x.

$$\bar{w} = \sum_{s=1}^{\infty} s \frac{\beta_s}{\beta}$$

Należy pamiętać, że dla modelu w którym pojawia się więcej niż jedna zmienna niezależna wielkości mnożników i średnich opóźnień liczone są osobno dla każdej z tych zmiennych.

Modele o rozłożonych opóźnieniach

- Przykład:

$$konsumpcja_t = \mu + 0{,}4doch\acute{o}d_t + 0{,}3doch\acute{o}d_{t-1} + 0{,}2doch\acute{o}d_{t-2}$$

Mnożnik bezpośredni: $\beta_0 = 0{,}4$

Mnożnik długookresowy: $\beta = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}9$

Średnie opóźnienie: $\bar{w} = 1 * \frac{0{,}4}{0{,}9} + 2 * \frac{0{,}3}{0{,}9} + 3 * \frac{0{,}2}{0{,}9} = 1{,}778$

Plan wykładu

- 1. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- 2. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
- 3. Analiza przyczynowości

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- W modelach autoregresyjnych o rozłożonych opóźnieniach (Autoregressive Distributed Lags) występują dodatkowo opóźnione zmienne zależne.

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \mu + \beta_0 x_t + \cdots + \beta_s x_{t-s} + \varepsilon_t$$

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- Stan równowagi długookresowej (steady state): jest to stan, w którym wartość oczekiwana zmiennej zależnej pozostaje stała w czasie, o ile tylko nie zmieniają się zmienne niezależne.

$$y^* = E(y_t) = E(y_{t-1}) = \cdots = E(y_{t-p})$$
$$x^* = x_t = x_{t-1} = \cdots = x_{t-s}$$

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- Stan równowagi długookresowej:

$$(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p)y^* = \mu + x^*\beta_0 + x^*\beta_1 + \cdots + x^*\beta_s$$

oznaczając: $\mu^* = \frac{\mu}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}$ $\quad \beta = \frac{\beta_0+\beta_1+\cdots\beta_s}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}$

otrzymujemy: $y^* = \mu^* + x^*\beta$

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- Mnożnik bezpośredni: mierzy wielkość oczekiwanej, natychmiastowej reakcji y_t na zmianę x_t o Δx.

$$E(y_t + \Delta y) = E(y_t) + \beta_0 \Delta x$$

$$\beta_0$$

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- Mnożnik długookresowy: mierzy wielkość oczekiwanej reakcji y_t na zmianę wszystkich przeszłych wartości x o Δx.

$$y^* = \mu^* + x^* \beta$$

$$y^* + E(\Delta y) = \mu^* + (x^* + \Delta x)\beta$$

$$\beta = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \cdots \beta_s}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_p}$$

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- Przykład:

$$
\begin{aligned}
&logkonsumpcja_t \\
&\qquad = 0{,}69logkonsumpcja_{t-1} \\
&\qquad + 0{,}12logkonsumpcja_{t-2} - 0{,}4 \\
&\qquad + 0{,}76logdochód_t - 0{,}65logdochód_{t-1} \\
&\qquad - 0{,}074logdochód_{t-2}
\end{aligned}
$$

Mnożnik bezpośredni: $\beta_0 = 0{,}76$

Mnożnik długookresowy: $\beta = \frac{0{,}76-0{,}65-0{,}074}{1-0{,}69-0{,}12}$ =0,19

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- W przypadku gdy w modelu występują opóźnione zmienne zależne nie można utrzymać założenia, że zmienne niezależne są nielosowe. Dlaczego?

- W przypadku gdy zmienne niezależne są losowe można dowieść zgodność estymatora MNK tylko wtedy, gdy $Cov(x_t, \varepsilon_t) = 0$.

- Powyższe założenie nie jest spełnione w modelach ADL, jeśli wystąpi autokorelacja składnika losowego.

Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach

- Stąd powinniśmy dążyć do eliminacji autokorelacji w modelach ADL poprzez dodawania opóźnionych zmiennych zależnych do modelu lub poprzez modelowanie sposobu w jaki są skorelowane błędy losowe.

- Do wykrywania autokorelacji w modelach ADL stosujemy test Breuscha-Godfreya a nie test Durbina-Watsona. Dlaczego?

Plan wykładu

- 1. Modele o rozłożonych opóźnieniach (DL)
- 2. Modele autoregresyjne o rozłożonych opóźnieniach (ADL)
- 3. Analiza przyczynowości

Analiza przyczynowości

- Związek przyczynowo-skutkowy:

a) jego występowanie oznacza, że wystąpienie przyczyny zwiększa prawdopodobieństwo późniejszego zaobserwowania skutku;

b) wiedza o zaistnieniu przyczyny zwiększa prawdopodobieństwo prawidłowej prognozy wystąpienia skutku.

Analiza przyczynowości

- Przyczynowość w sensie Grangera:

  Zmienna x jest przyczyną w sensie Grangera zmiennej y, jeśli bieżące wartości zmiennej y można dokładniej prognozować przy użyciu przeszłych wartości x, niż bez ich wykorzystania.

Analiza przyczynowości

- Testowanie przyczynowość w sensie Grangera:

$$y_t = a(t) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

i testujemy: $H_0 \colon \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ czyli x nie jest przyczyną y w sensie Grangera.

Pytania teoretyczne

1. Podać ogólną postać modeli DL i ADL.
2. Podać wzory na mnożnik bezpośredni i długookresowy w modelach DL i ADL i podać ich interpretację.
3. Podać wzór na średnie opóźnienie w modelu DL i podać jego interpretację.
4. Pokazać jak można policzyć stan równowagi długookresowej w modelu ADL. Odpowiedź uzasadnić.
5. Jakie założenie musi spełniać błąd losowy w modelu ADL, aby estymator MNK w tym modelu był zgodny? Za pomocą jakiego testu można zweryfikować to założenie?
6. Wyjaśnić jak należy rozumieć przyczynowość w sensie Grangera i jak ją testujemy.

Dziękuję za uwagę