Metoda Największej Wiarygodności

Stanisław Cichocki
Natalia Nehrebecka

Wykład 7

Plan wykładu

- 1. Metoda Największej Wiarygodności (MNW)
- 2. Założenia MNW
- 3. Własności estymatorów MNW
- 4. Testowanie hipotez w MNW

Plan wykładu

- 1. Metoda Największej Wiarygodności (MNW)
- 2. Założenia MNW
- 3. Własności estymatorów MNW
- 4. Testowanie hipotez w MNW

Metoda Największej Wiarygodności

- MNW to jedna z bardziej uniwersalnych metod estymacji.

- Załóżmy, że mamy próbę N obserwacji dla y_i oraz x_i z łącznego rozkładu o gęstości $f_\omega(y, X)$.

- Załóżmy dodatkowo, że postać funkcji $f_\omega(.)$ nie zależy od indeksu obserwacji a jedynie od wektora nieznanych parametrów $\omega \subset R^k$.

Metoda Największej Wiarygodności

- Estymatorem MNW parametru ω jest takie $\tilde{\omega}$ dla której łączna funkcja gęstości dla całej próby ma największą wartość:

$$\tilde{\omega} = \arg\max_{\omega} f_{\omega}(y, X)$$

- Najczęściej zamiast funkcji gęstości maksymalizujemy logarytm $\ln f_{\omega}(y, X)$.

- Maksimum logarytmu funkcji gęstości, o ile istniej, przypada w tym samym punkcie co maksimum funkcji gęstości:

$$\tilde{\omega} = \arg\max_{\omega} f_{\omega}(y, X) = \arg\max_{\omega} \ln f(y, X)$$

Metoda Największej Wiarygodności

- Intuicyjnie: MNW – oszacowanie parametru ω to taka wartość $\tilde{\omega}$, która maksymalizuje prawdopodobieństwo (łączną funkcję gęstości) zaobserwowania tej próby, którą rzeczywiście zaobserwowano.

Plan wykładu

- 1. Metoda Największej Wiarygodności (MNW)
- 2. Założenia MNW
- 3. Własności estymatorów MNW
- 4. Testowanie hipotez w MNW

Założenia MNW

- Znajomość postaci łącznej funkcji gęstości i znajomość wylosowanej próby

Założenia MNW

- Słaba egzogeniczność

- Załóżmy, że wektor ω został podzielony: $\omega = (\theta', \psi')$ oraz, że θ, ψ nie są ze sobą powiązane żadnymi ograniczeniami. Czyli, jeśli $\theta \in \Theta$ i $\psi \in \Psi$ to $\omega \in \Omega = \Theta \times \Psi$

- Interesują nas tylko parametry zawarte w θ.

- Mówimy, że X jest słabo egzogeniczne względem wektora parametrów θ , jeśli możliwa jest następująca dekompozycja funkcji gęstości:

$$f_{\omega}(y, X) = f_{\theta}(y \mid X) f_{\psi}(X)$$

Założenia MNW

- Ponieważ:

$$\ln f_{\omega}(y,X)=\ln f_{\theta}(y\,|\,X)+\ln f_{\psi}(X)$$

więc

$$\max_{\omega}\ln f_{\omega}(y,X)=\max_{\theta}\ln f_{\theta}(y\,|\,X)+\max_{\psi}\ln f_{\psi}(X)$$

- Estymator MNW parametrów $\tilde{\omega}=(\tilde{\theta}',\tilde{\psi}')$ można policzyć licząc osobno estymator MNW dla wektora parametrów θ,ψ .

$$\tilde{\theta}=\arg\max\ln f_{\theta}(y\,|\,X)$$

$$\tilde{\omega}=\arg\max\ln f_{\psi}(X)$$

Założenia MNW

- Niezależność

- Rozumiemy przez to, że obserwacje y_i są niezależne oraz, że zmienne egzogeniczne x_i wpływają wyłącznie a prawdopodobieństwo y_i

- Wtedy warunkowa łączna funkcja gęstości (funkcja wiarygodności):

$$L_\theta(y|X) = f_\theta(y|X) = f_\theta(y_1,\dots,y_N|x_1,\dots,x_N) = \prod_{i=1}^{N} f_\theta(y_i|x_i)$$

Założenia MNW

- Identyfikowalność parametrów

- Wszystkie parametry modelu wpływają na prawdopodobieństwo zaobserwowania próby. Zatem możliwe jest oszacowanie wielkości tych parametrów na podstawie zaobserwowanej próby.

- Tylko jeśli parametry są identyfikowalne można uzyskać oszacowania ich wielkości.

Założenia MNW

- Identyfikowalność parametrów – definicja:

Istnieje taki zbiór danych y, X, dla którego

$$L_{\theta_0}(y \mid X) > 0$$

$$L_{\theta_0}(y \mid X) \neq L_{\theta}(y \mid X)$$

dla każdego $\theta \neq \theta_0$.

Gdzie θ_0 to prawdziwa wielkość parametru θ

Plan wykładu

- 1. Metoda Największej Wiarygodności (MNW)
- 2. Założenia MNW
- 3. Własności estymatorów MNW
- 4. Testowanie hipotez w MNW

Własności estymatorów MNW

- Z reguły zamiast funkcji wiarygodności maksymalizujemy jej logarytm:

$$l_\theta(y|X) = \ln L_\theta(y|X) = \ln \prod_{i=1}^{N} f_\theta(y_i|x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta(y_i|x_i) = \sum_{i=1}^{n} l_i(y_i|x_i,\theta)$$

- Estymator MNW liczymy maksymalizując funkcję wiarygodności. Jedynie w nielicznych przypadkach jest to możliwe analitycznie. W większości przypadków wykorzystujemy metody numeryczne.

Własności estymatorów MNW

- Zgodność

$$\tilde{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

Własności estymatorów MNW

- Asymptotyczna normalność

- Asymptotyczny rozkład estymatora MNW:

$$\sqrt{N}(\tilde{\theta}-\theta)\xrightarrow{D}N(0,i^{-1}(\theta))$$

gdzie:

$$i(\theta)=\lim_{N\to\infty}[\frac{1}{N}I(\theta)]$$

$$I(\theta)=Var(\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta})=-E(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'})$$

Własności estymatorów MNW

- Asymptotyczna normalność umożliwia sformułowanie przedziałów ufności oraz znalezienie rozkładów statystyk testowych.

Własności estymatorów MNW

- Asymptotyczna efektywność

- Asymptotyczna efektywność estymatorów MNW jest wnioskiem z twierdzenia o dolnym ograniczeniu Rao-Cramera.

- Twierdzenie Rao-Cramera:

Jeśli estymator $\hat{\theta}$ jest zgodny, to jego asymptotyczna wariancja jest większa lub równa dolnemu ograniczeniu Rao-Cramera

$$\lim_{N\to\infty} Var[\sqrt{N}(\hat{\theta}-\theta)] \geq i^{-1}(\theta)$$

Własności estymatorów MNW

- Estymatory MNW są asymptotycznie efektywne, ponieważ ich wariancja zbiega do dolnego ograniczenia Rao-Cramera.

- Wady estymatorów MNW:

  a) z reguły obciążone w małych próbach;

  b) ich zastosowanie wymaga znajomości rozkładu warunkowego y.

Plan wykładu

- 1. Metoda Największej Wiarygodności (MNW)
- 2. Założenia MNW
- 3. Własności estymatorów MNW
- 4. Testowanie hipotez w MNW

Testowanie hipotez w MNW

- Testowana hipoteza:

$$H_0: \left[\begin{array}{l} h_1(\theta) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ h_g(\theta) = 0 \end{array}\right.$$

gdzie: g – liczba narzuconych ograniczeń

Testowanie hipotez w MNW

- Inny zapis:

$$H_0 : h(\theta) = 0$$

gdzie: $h(\theta) = (h_1(\theta), \ldots, h_g(\theta))'$

Testowanie hipotez w MNW

- Oznaczenia:

  $\tilde{\theta}$ - estymator MNW bez ograniczeń

  $\tilde{\theta}_R$ - estymator MNW z ograniczeniami, uzyskany jako argument maksymalizujący funkcję wiarygodności przy warunkach pobocznych danych hipotezą zerową:

$$\tilde{\theta}_R = \arg(\max_{\theta} L(\theta)\ s.t.\ h(\theta) = 0)$$

Testowanie hipotez w MNW

- Statystyka ilorazu wiarygodności (Likelihood Ratio – LR)

- Możemy ją policzyć, jeśli dysponujemy wielkościami funkcji wiarygodności dla maksimum bez ograniczeń i wielkością tej samej funkcji dla maksimum z ograniczeniami

$$LR = 2(l(\tilde{\theta}) - l(\tilde{\theta}_R)) \xrightarrow{D} \chi^2_g$$

Testowanie hipotez w MNW

- Zaleta statystyki LR: łatwy do przeprowadzenia, gdy znamy wartość logarytmu funkcji wiarygodności.

- Wada statystki LR: konieczność oszacowania zarówno modelu bez ograniczeń jak i modelu z ograniczeniami

Testowanie hipotez w MNW

- Statystyka Walda

$$W = h(\tilde{\theta})'[H(\tilde{\theta})I^{-1}H'(\tilde{\theta})]^{-1}h(\tilde{\theta}) \xrightarrow{D} \chi_g^2$$

gdzie:

$H(\theta) = \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta'}$ macierz pierwszych pochodnych $h(\theta)$

Testowanie hipotez w MNW

- Zaleta statystyki Walda: wystarczy oszacować model bez ograniczeń.

- Wada statystyki Walda: w małych próbach statystyka Walda nie jest niezmiennicza względem sposobu sformułowania hipotezy zerowej. Oznacza to, że dla tej samej hipotezy sformułowanej na różne sposoby możemy uzyskać różne wielkości statystyki testowej.

Testowanie hipotez w MNW

- Statystyka mnożników Lagrange'a (Lagrange Multipliers - LM)

$$LM = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta'}\Big|_{\theta=\tilde{\theta}_R} I^{-1}(\tilde{\theta}_R)\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\tilde{\theta}_R} \xrightarrow{D} \chi_g^2$$

Testowanie hipotez w MNW

- Zaleta statystyki LM: wymaga jedynie oszacowania modelu z ograniczeniami.

- Wada statystyki LM: forma analityczna bardziej skomplikowana niż w przypadku LR.

Pytania teoretyczne

1. Podać standardowe założenia MNW dla modelu szacowanego na próbie przekrojowej.
2. Jakie są zalety estymatorów MNW?
3. Jaki asymptotyczny rozkład mają estymatory MNW i czemu równa jest ich asymptotyczna wariancja?
4. Jakie trzy testy stosujemy do testowania hipotez parametrycznych postaci $h(\theta)=0$ w kontekście estymacji MNW? Porównaj wady i zalety tych testów.
5. Opisać sposoby testowania istotności poszczególnych zmiennych w modelu szacowanym MNW za pomocą testu Walda i testu LR.

Dziękuję za uwagę