ACF, PACF, badanie stacjonarności

Stanisław Cichocki
Natalia Nehrebecka

Wykład 3

Plan wykładu

- 1. Zmienne stacjonarne
- 2. Zmienne zintegrowane
- 3. Regresja pozorna
- 4. Funkcje ACF i PACF
- 5. Badanie stacjonarności
  - Test Dickey-Fullera (DF)

Plan wykładu

- 1. Zmienne stacjonarne
- 2. Zmienne zintegrowane
- 3. Regresja pozorna
- 4. Funkcje ACF i PACF
- 5. Badanie stacjonarności
  - Test Dickey-Fullera (DF)

Zmienne stacjonarne

- Standardowa definicja stacjonarności w wielu przypadkach okazuje się zbyt restrykcyjna: zmienne ekonomiczne oscylują nie tyle wokół stałej ale wokół pewnego trendu.

- Zmienna stacjonarna wokół trendu (trendostacjonarna) jeśli odchylenie od trendu:

$$y_t - E(y_t)$$

jest stacjonarne.

Zmienne stacjonarne

- Przykład zmiennej trendostacjonarnej: trend liniowy

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

$$E(y_t) = \alpha + \beta t$$

$$y_t - E(y_t) = \varepsilon_t$$

Plan wykładu

- 1. Zmienne stacjonarne
- 2. Zmienne zintegrowane
- 3. Regresja pozorna
- 4. Funkcje ACF i PACF
- 5. Badanie stacjonarności
  - Test Dickey-Fullera (DF)

Zmienne zintegrowane

- Zmienne zintegrowane: zmienne niestacjonarne, które można sprowadzić do stacjonarności poprzez różnicowanie.

- Zmienna, która po zastosowaniu d-tych różnic staje się zmienną stacjonarną oznaczamy jako:

$$y_t \sim I_d$$

- Mówimy, ze zmienna y_t jest zintegrowana rzędu d.
- Zmienne stacjonarne są zintegrowane rzędu 0:

$$y_t \sim I(0)$$

Zmienne zintegrowane

- Przykład zmiennej niestacjonarnej: błądzenie przypadkowe (random walk)

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$$

- Różnicując zmienną y_t :

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

Biały szum, zmienna I(0). Wobec tego błądzenie przypadkowe jest zmienną I(1)

Plan wykładu

- 1. Zmienne stacjonarne
- 2. Zmienne zintegrowane
- 3. Regresja pozorna
- 4. Funkcje ACF i PACF
- 5. Badanie stacjonarności
  - Test Dickey-Fullera (DF)

Regresja pozorna

- Dlaczego w ogóle zajmować się stacjonarnością zmiennych? Założenie o stacjonarności zmiennych w modelu jest niezbędne przy wyprowadzaniu rozkładów typowych statystyk testowych używanych przy testowaniu hipotez.

- Jeśli zmienne w modelu są niestacjonarne to rozkłady asymptotyczne statystyk testowych są niestandardowe, co może prowadzić do błędnych wyników wnioskowania statystycznego.

- Przykładem jest problem regresji pozornej.

Regresja pozorna

- Występuje gdy część zmiennych w modelu nie jest stacjonarna (najczęściej I(1)).

- W takim przypadku statystyki t dla zmiennych I(1) okazują się często istotne nawet jeśli między zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi nie ma żadnego związku.

Regresja pozorna

- Generujemy obserwacje dwóch niezależnych zmiennych niestacjonarnych:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$\mathrm{u}_\mathrm{t} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Następnie przeprowadzamy regresję y_t na X_t, zapisujemy statystykę t i DW.

Regresja pozorna

- Następnie powatrzamy całość 1000 razy zapisując za każdym razem wynik. Mając serię statystyk t obliczamy średnią, odchylenie standardowe, skośność, kurtozę i porównujemy z parametrami testu t-Studenta. Przy poziomie istotności 5% powinniśmy uzyskać istotny wynik w mniej więcej 5% przypadków.

Regresja pozorna

	Teoretyczne	Regresja y na x
Średnia	0,000	0,048
Odch.stand.	1,021	4,849
Skośność	0,000	-0,214
Kurtoza	3,125	3,845
5% percentyl	1,677	8,294
% istotnych wyników	5,000	64,200
	Statystyka DW	
Średnia	2,000	0,313

Plan wykładu

- 1. Zmienne stacjonarne
- 2. Zmienne zintegrowane
- 3. Regresja pozorna
- 4. Funkcje ACF i PACF
- 5. Badanie stacjonarności
  - Test Dickey-Fullera (DF)

Funkcja ACF

- Funkcja autokorelacji (Autocorrelation Function) to współczynnik korelacji między dwoma realizacjami y_t oddalonymi w czasie o k okresów.

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{Var(y_t)}$$

$$\rho \in [-1,1]$$

Funkcja PACF

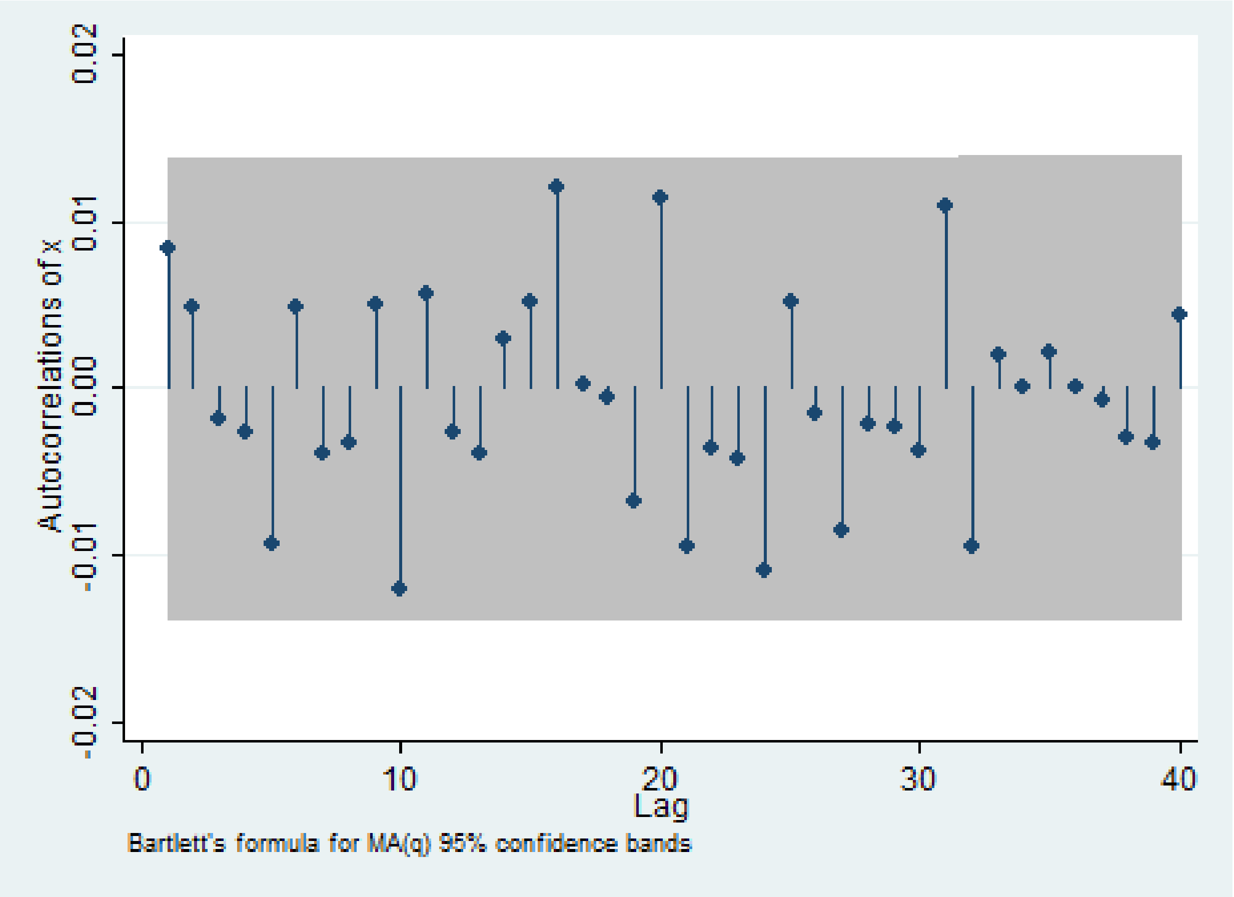
- Funkcja autokorelacji cząstkowej (Partial Autocorrelation Function) mierzy korelację między obserwacjami y_t oddalonymi od siebie o k okresów bez uwzględnienia wpływu $y_{t-k-1}, y_{t-k-2}, \ldots, y_{t-1}$

- Funkcja ta jest równa wyestymowanemu współczynnikowi α_k w modelu autoregresyjnym k tego rzędu:

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{t-1} + \ldots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

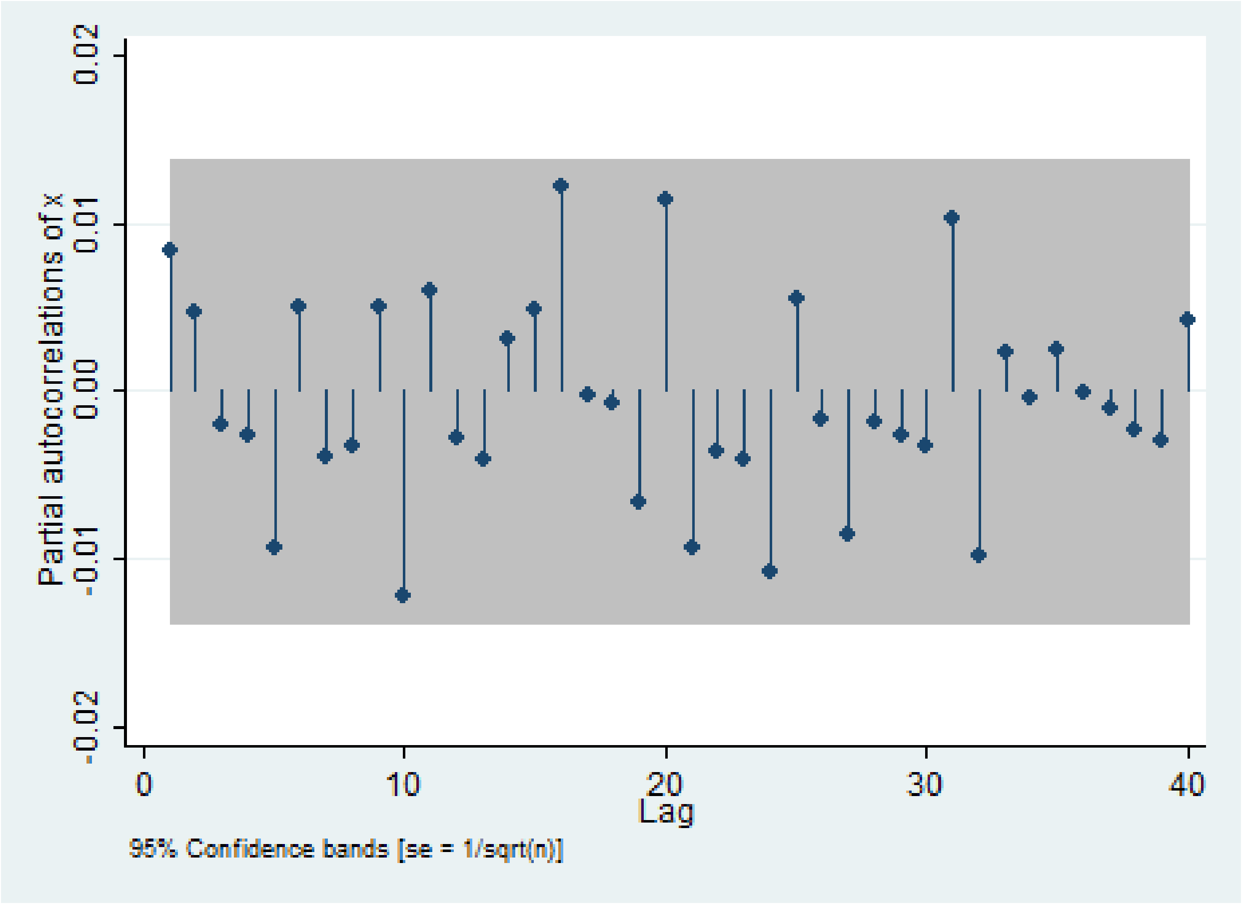
Funkcja ACF

- ACF dla białego szumu



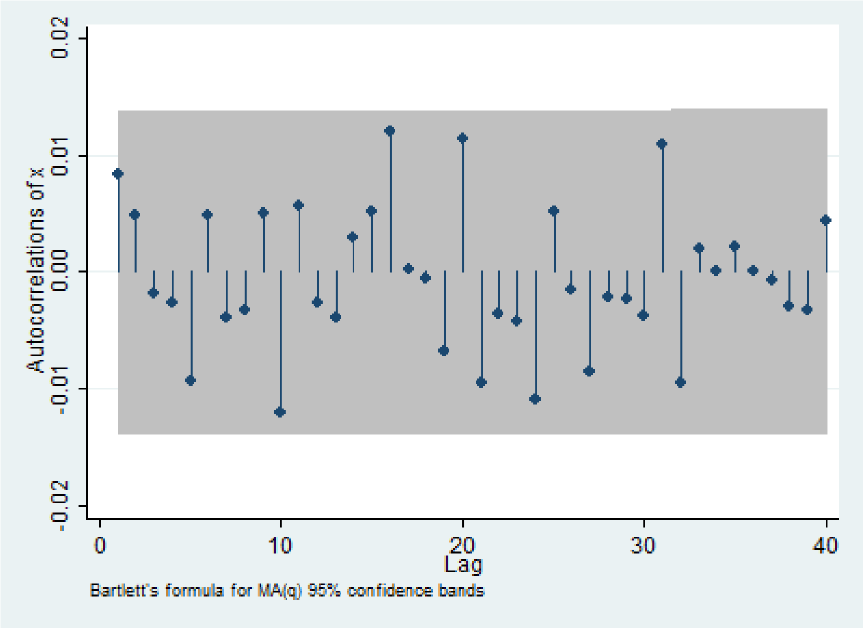
Funkcja PACF

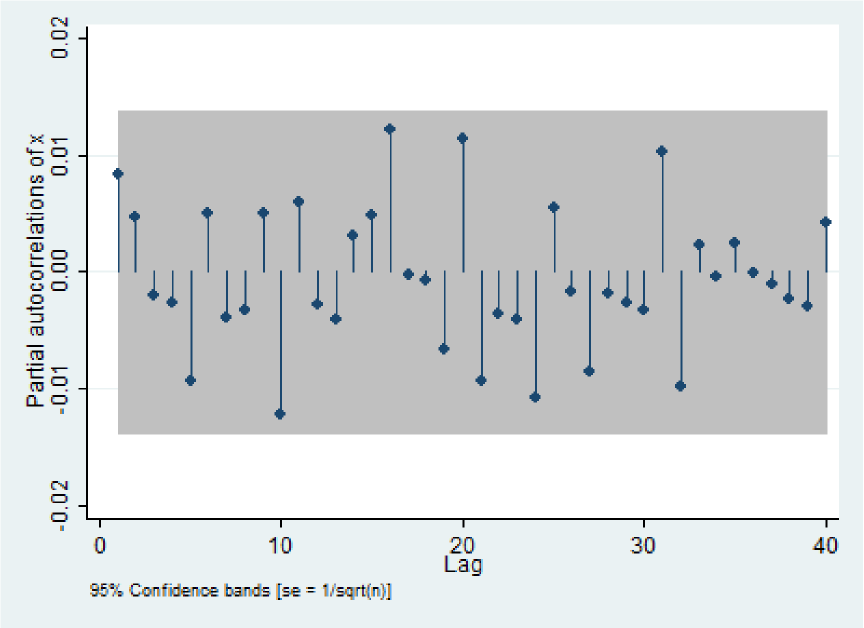
- PACF dla białego szumu



Funkcja ACF i PACF

- ACF i PACF dla białego szumu





Funkcja ACF i PACF

```
                                                          -1      0      1   -1        0        1
LAG        AC        PAC        Q      Prob>Q  [Autocorrelation]  [Partial Autocor]
-------------------------------------------------------------------------------------
1         0.0083    0.0083    1.3868   0.2389          |                    |
2         0.0048    0.0047    1.8458   0.3974          |                    |
3        -0.0019   -0.0020    1.9194   0.5893          |                    |
4        -0.0027   -0.0027     2.068   0.7233          |                    |
5        -0.0094   -0.0093     3.828   0.5744          |                    |
6         0.0048    0.0050    4.2914   0.6373          |                    |
7        -0.0039   -0.0039     4.599   0.7088          |                    |
8        -0.0033   -0.0034     4.823   0.7763          |                    |
9         0.0050    0.0050    5.3186   0.8057          |                    |
10       -0.0120   -0.0122    8.2129   0.6081          |                    |
```

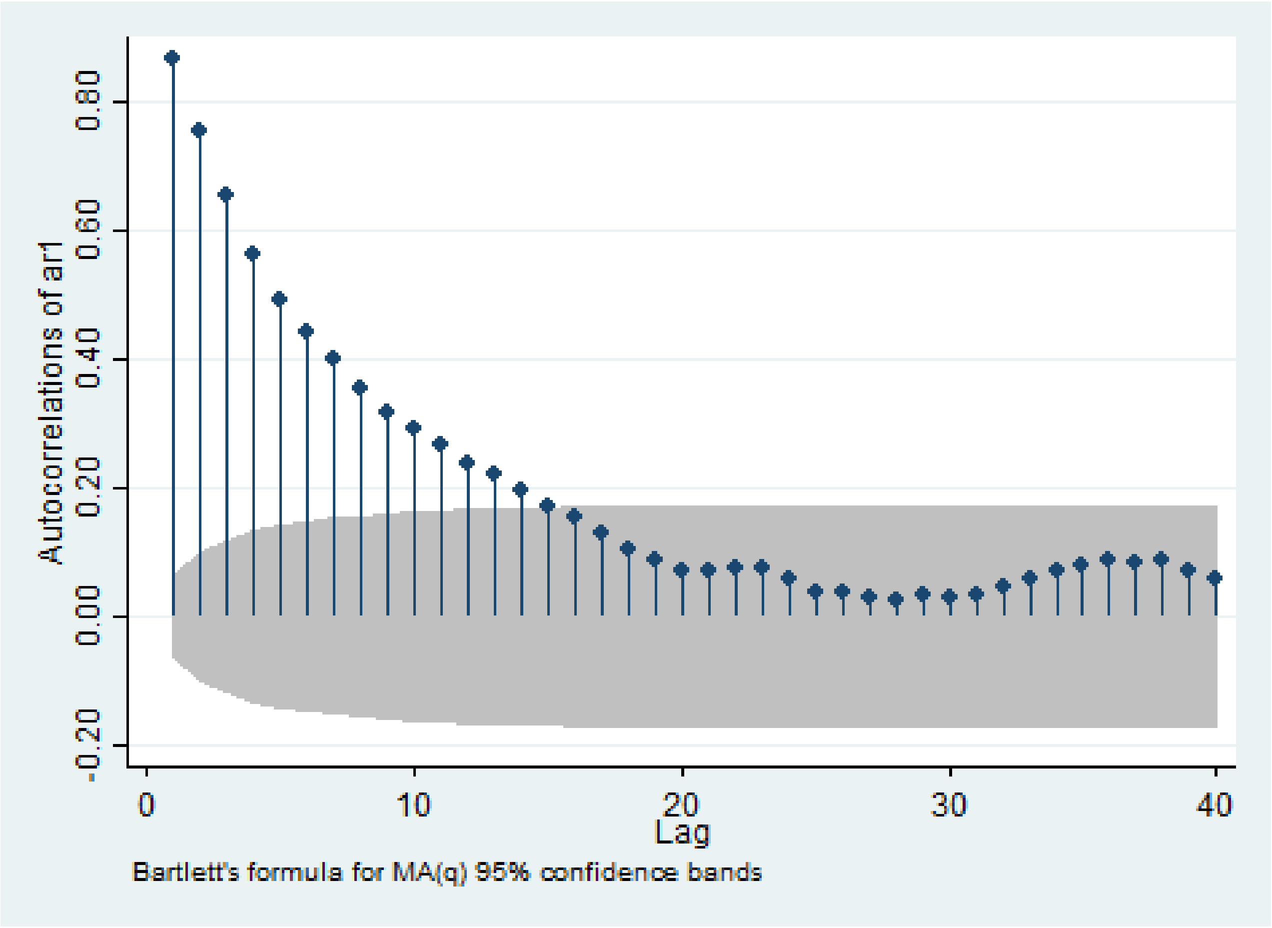
Statystyka Q Ljunga-Boxa:

$$Q = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{{\hat{\rho}_k}^2}{T-k} \quad \sim{\chi^2}_m$$

H_0 proces jest białym szumem

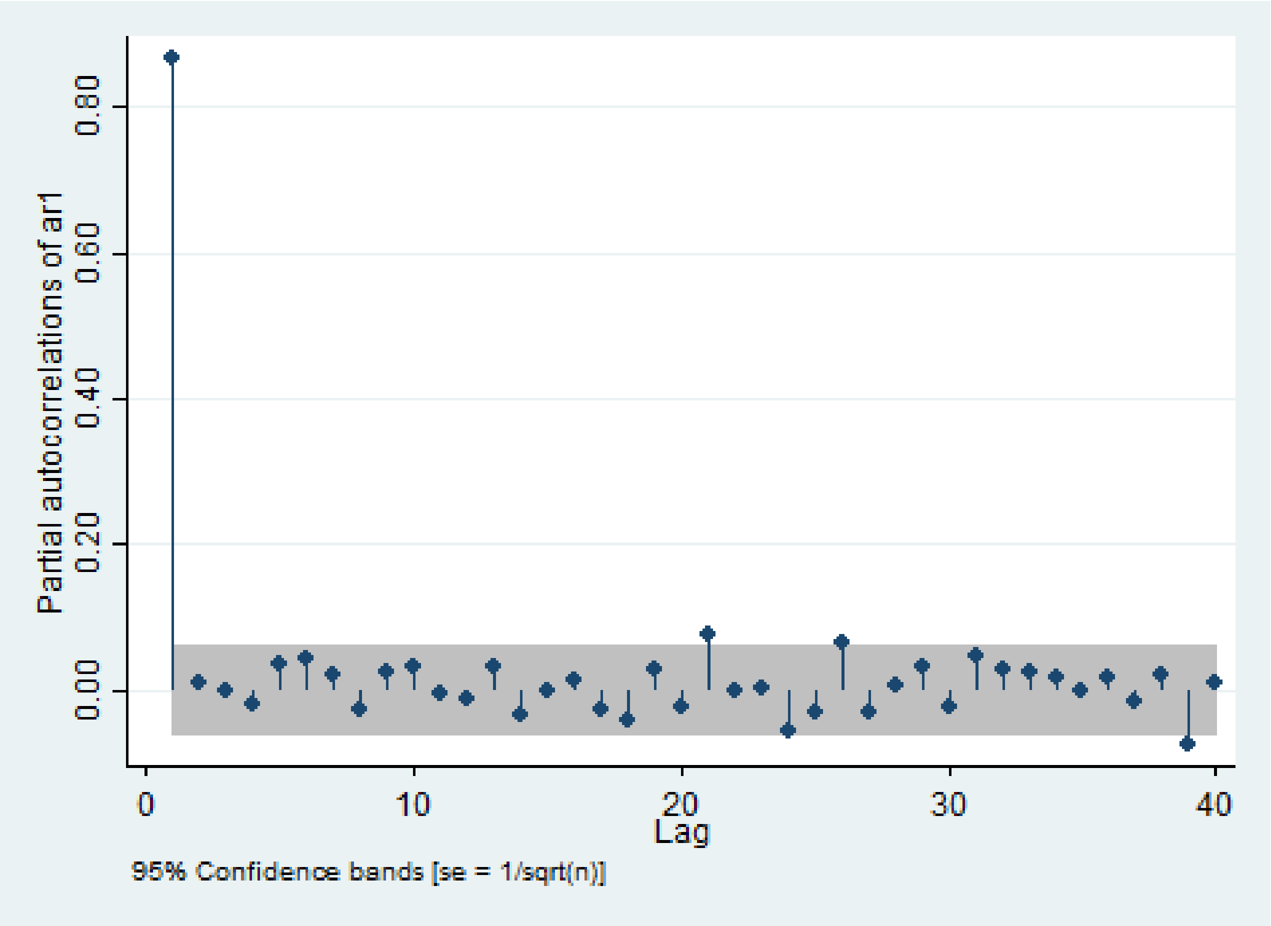
Funkcja ACF

- ACF dla AR(1) gdy $|\alpha|<1$



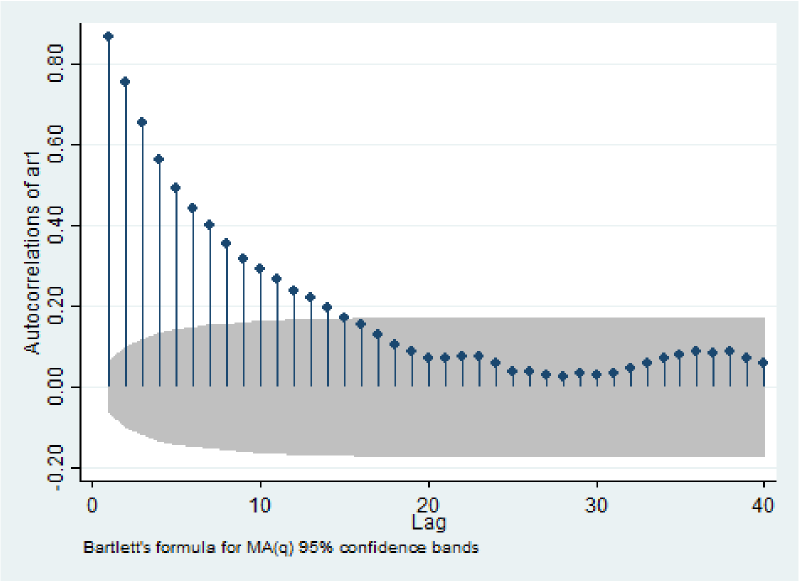
Funkcja PACF

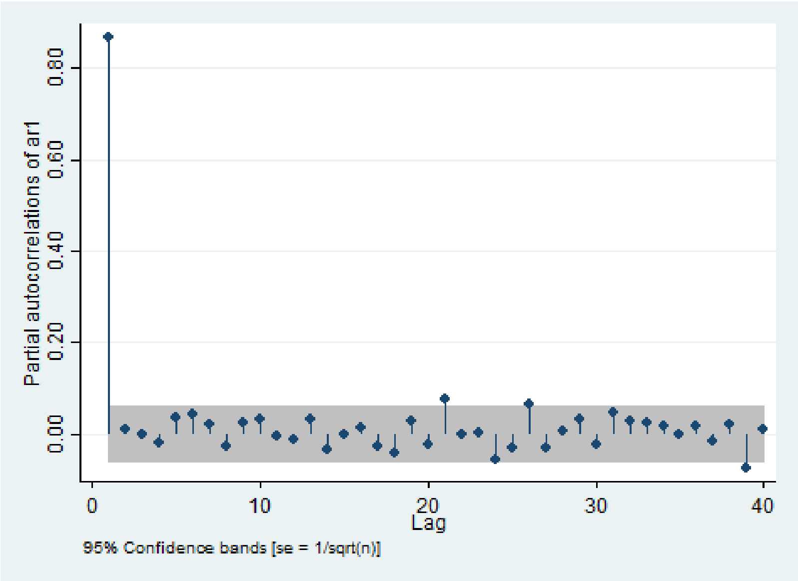
- PACF dla AR(1) gdy $|\alpha|<1$



Funkcja ACF i PACF

- ACF i PACF dla AR(1) gdy $|\alpha| < 1$



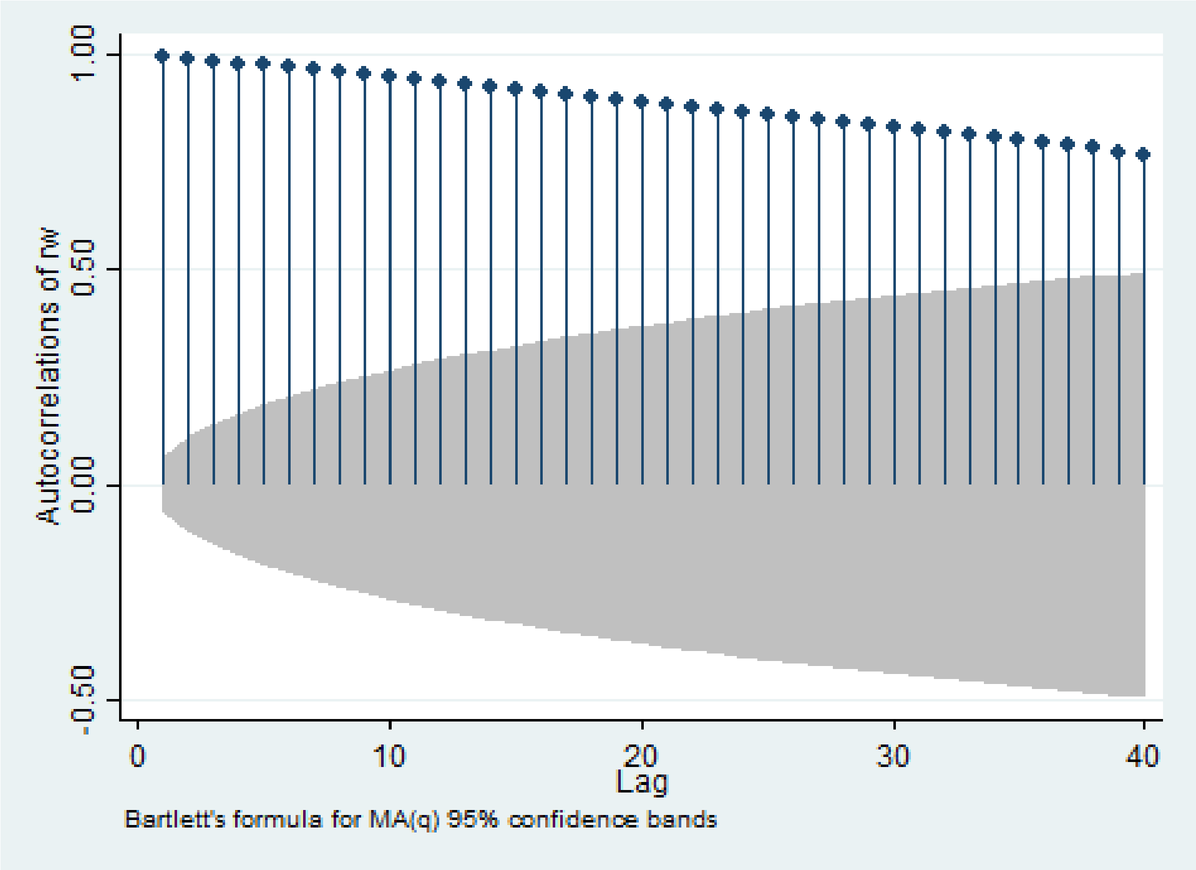


Funkcja ACF i PACF

```
                                          -1       0       1 -1       0       1
 LAG       AC       PAC      Q     Prob>Q  [Autocorrelation]  [Partial Autocor]
-------------------------------------------------------------------------------
1        0.8668   0.8683   753.52  0.0000          |------            |------
2        0.7536   0.0114   1323.6  0.0000          |------            |
3        0.6538  -0.0012   1753.2  0.0000          |-----             |
4        0.5624  -0.0212   2071.4  0.0000          |----              |
5        0.4921   0.0349   2315.3  0.0000          |---               |
6        0.4400   0.0419   2510.5  0.0000          |---               |
7        0.3974   0.0219   2669.9  0.0000          |---               |
8        0.3519  -0.0275     2795  0.0000          |--                |
9        0.3178   0.0228   2897.1  0.0000          |--                |
10       0.2931   0.0307   2984.1  0.0000          |--                |
```

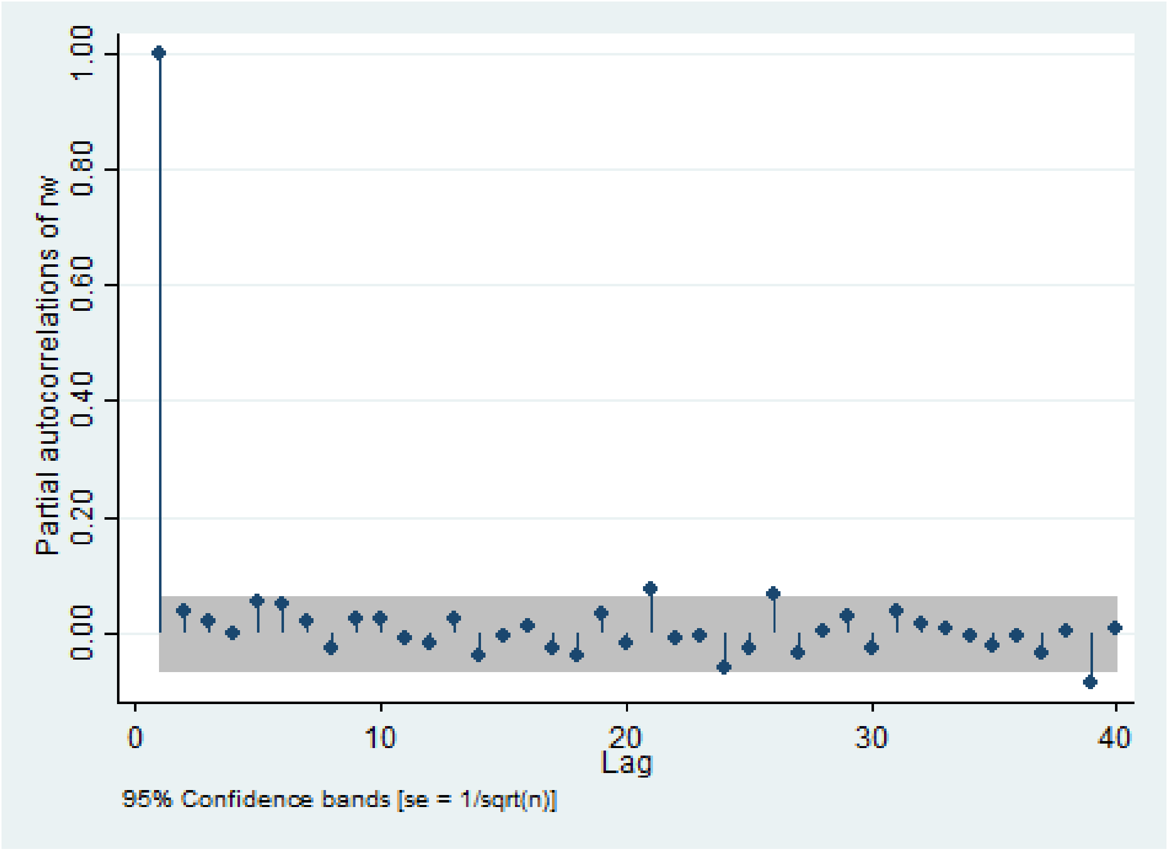
Funkcja ACF

- ACF dla błądzenia przypadkowego



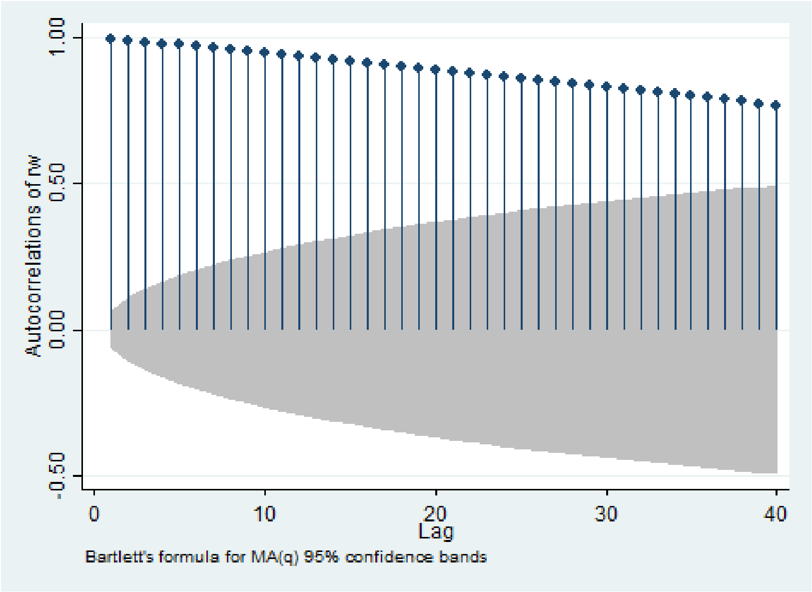
Funkcja PACF

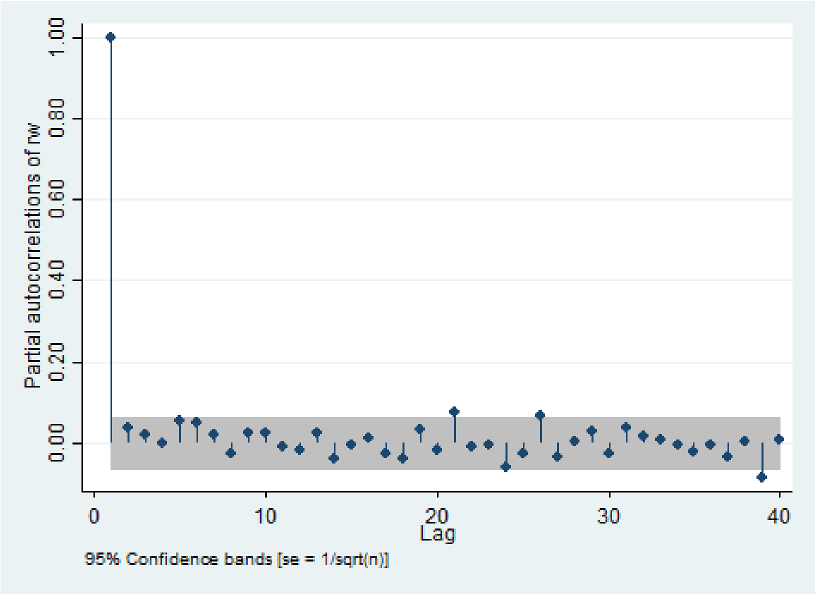
- PACF dla błądzenia przypadkowego



Funkcja ACF i PACF

- ACF i PACF dla błądzenia przypadkowego





Funkcja ACF i PACF

```
                                            -1    0         1  -1      0         1
 LAG        AC       PAC       Q      Prob>Q  [Autocorrelation]  [Partial Autocor]
-------------------------------------------------------------------------------
1         0.9941   0.9975   991.19  0.0000          |-------            |-------
2         0.9884   0.0369     1972  0.0000          |-------            |
3         0.9829   0.0208     2943  0.0000          |-------            |
4         0.9771   0.0006   3903.5  0.0000          |-------            |
5         0.9717   0.0528   4854.3  0.0000          |-------            |
6         0.9664   0.0503   5795.8  0.0000          |-------            |
7         0.9614   0.0228   6728.5  0.0000          |-------            |
8         0.9562  -0.0262     7652  0.0000          |-------            |
9         0.9508   0.0242     8566  0.0000          |-------            |
10        0.9456   0.0264   9470.9  0.0000          |-------            |
```

Plan wykładu

- 1. Zmienne stacjonarne
- 2. Zmienne zintegrowane
- 3. Regresja pozorna
- 4. Funkcje ACF i PACF
- 5. Badanie stacjonarności
  - Test Dickey-Fullera (DF)

Test Dickey-Fullera (DF)

- Najwcześniejszy i najpopularniejszy test, za pomocą którego badamy czy zmienna jest stacjonarna.

- Mamy model:

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

$H_0: \beta = 1$ - y_t błądzenie przypadkowe (zmienna niestacjonarna)

$H_1: |\beta| < 1$ - y_t jest procesem AR(1) (zmienna stacjonarna)

Test Dickey-Fullera (DF)

- Odejmując od obu stron y_{t-1} :

$$y_t - y_{t-1} = \beta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = (\beta - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_0 : \rho = 0$ - y_t jest niestacjonarne

$H_0 : \rho \in (-2,0)$ - y_t jest stacjonarne

Test Dickey-Fullera (DF)

- Problem: nie można używać statystki t do testowania istotności parametru ρ ponieważ rozkłady statystyk testowych są niestandardowe jeśli w modelu zmienne niestacjonarne.

- Specjalne tablice z wartościami krytycznymi dla testu DF.

- Uwaga techniczna: wielkości krytyczne rozkładu statystki DF są zawsze ujemne.

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF przeprowadzamy w następujący sposób:

  1. regresja Δy_t na y_{t-1}
  2. porównujemy statystykę t dla y_{t-1} z wartościami krytycznymi testu DF:

     a) wartość statystyki jest mniejsza od wartości krytycznej - odrzucamy H_0 o niestacjonarności y_t i przyjmujemy H_1 o stacjonarności y_t ;

     b) wartość statystyki jest większa od wartości krytycznej – nie ma podstaw do odrzucenia H_0

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla białego szumu:

```
Dickey-Fuller test for unit root                   Number of obs   =     19999

                           ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)           -140.235            -2.580            -1.950            -1.620


------------------------------------------------------------------------------
         D.x |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |
         L1. |  -.9916464   .0070713  -140.24   0.000    -1.005507   -.9777861
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla białego szumu:

```
Dickey-Fuller test for unit root                   Number of obs   =     19999

                         ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
              Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
            Statistic          Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)        -140.235           -2.580            -1.950            -1.620

------------------------------------------------------------------------------
         D.x |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |
         L1. |  -.9916464   .0070713  -140.24   0.000    -1.005507   -.9777861
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla białego szumu:

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   19999
-------------+------------------------------           F(  1, 19998) =19665.87
       Model |  19948.5217     1  19948.5217           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  20285.4259 19998  1.01437273           R-squared     =  0.4958
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4958
       Total |  40233.9476 19999  2.01179797           Root MSE      =  1.0072

------------------------------------------------------------------------------
         D.x |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |
         L1. |  -.9916464   .0070713  -140.24   0.000    -1.005507   -.9777861
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla białego szumu:

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =   19999
-------------+------------------------------           F(  1, 19998) =19665.87
       Model |  19948.5217     1  19948.5217           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  20285.4259 19998  1.01437273           R-squared     =  0.4958
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4958
       Total |  40233.9476 19999  2.01179797           Root MSE      =  1.0072

------------------------------------------------------------------------------
         D.x |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |
         L1. |  -.9916464   .0070713  -140.24   0.000    -1.005507   -.9777861
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	1.699	1	0.1925
2	1.699	2	0.4276
3	1.768	3	0.6220
4	1.896	4	0.7549

H0: no serial correlation

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla błądzenia przypadkowego:

```
Dickey-Fuller test for unit root                   Number of obs   =       999

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)             -0.277            -2.580            -1.950            -1.620

------------------------------------------------------------------------------
        D.rw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rw |
         L1. |  -.0005213    .001879    -0.28   0.782    -.0042086     .003166
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla błądzenia przypadkowego:

```
Dickey-Fuller test for unit root                   Number of obs   =       999

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
Z(t)            -0.277            -2.580            -1.950            -1.620

------------------------------------------------------------------------------
        D.rw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rw |
         L1. |  -.0005213    .001879    -0.28   0.782    -.0042086     .003166
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla błądzenia przypadkowego

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     999
-------------+------------------------------           F(  1,   998) =    0.08
       Model |  .077155196     1  .077155196           Prob > F      =  0.7815
    Residual |  1000.45476   998  1.00245968           R-squared     =  0.0001
-------------+------------------------------           Adj R-squared = -0.0009
       Total |  1000.53191   999  1.00153345           Root MSE      =  1.0012

------------------------------------------------------------------------------
        D.rw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rw |
         L1. |  -.0005213    .001879    -0.28   0.782    -.0042086     .003166
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla błądzenia przypadkowego

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     999
-------------+------------------------------           F(  1,   998) =    0.08
       Model |  .077155196     1  .077155196           Prob > F      =  0.7815
    Residual |  1000.45476   998  1.00245968           R-squared     =  0.0001
-------------+------------------------------           Adj R-squared = -0.0009
       Total |  1000.53191   999  1.00153345           Root MSE      =  1.0012

------------------------------------------------------------------------------
        D.rw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rw |
         L1. | -.0005213    .001879     -0.28   0.782    -.0042086     .003166
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	1.084	1	0.2977
2	1.477	2	0.4779
3	2.629	3	0.4524
4	2.639	4	0.6199

H0: no serial correlation

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla zróżnicowanego błądzenia przypadkowego:

```
Dickey-Fuller test for unit root                   Number of obs   =       998

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)            -30.573            -2.580            -1.950            -1.620

------------------------------------------------------------------------------
       D.drw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         drw |
         L1. |  -.9675424   .0316471   -30.57   0.000    -1.029645   -.9054398
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla zróżnicowanego błądzenia przypadkowego:

```
Dickey-Fuller test for unit root                   Number of obs   =       998

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ---------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic           Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)            -30.573            -2.580            -1.950            -1.620

------------------------------------------------------------------------------
       D.drw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         drw |
         L1. |  -.9675424   .0316471   -30.57   0.000    -1.029645   -.9054398
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla zróżnicowanego błądzenia przypadkowego

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     998
-------------+------------------------------           F(  1,   997) =  934.70
       Model |  936.633212     1  936.633212           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  999.063052   997  1.00206926           R-squared     =  0.4839
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4834
       Total |  1935.69626   998  1.93957541           Root MSE      =   1.001

------------------------------------------------------------------------------
       D.drw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rw |
         LD. |  -.9675424   .0316471   -30.57   0.000    -1.029645   -.9054398
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

- Test DF dla zróżnicowanego błądzenia przypadkowego

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     998
-------------+------------------------------           F(  1,   997) =  934.70
       Model |  936.633212     1  936.633212           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  999.063052   997  1.00206926           R-squared     =  0.4839
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4834
       Total |  1935.69626   998  1.93957541           Root MSE      =   1.001

------------------------------------------------------------------------------
       D.drw |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rw |
         LD. |  -.9675424   .0316471   -30.57   0.000    -1.029645   -.9054398
------------------------------------------------------------------------------
```

Test Dickey-Fullera (DF)

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	0.015	1	0.9032
2	1.874	2	0.3919
3	3.245	3	0.3554
4	3.245	4	0.5176

H0: no serial correlation

Pytania teoretyczne

1. Podać definicję zmiennej stacjonarnej i trendostacjonarnej.
2. Wyjaśnić, co to są zmienne I(0) i I(1) i udowodnić, że biały szum jest zmienną I(0) a błądzenie przypadkowe zmienną I(1).
3. Wyjaśnić na czym polega zjawisko regresji pozornej.
4. Dlaczego przed przystąpieniem do weryfikacji hipotez o istotności zmiennych w modelu szacowanym na szeregu czasowym powinniśmy przetestować ich rząd integracji?

Dziękuję za uwagę