

Sezonowość, zmienne stacjonarne i zmienne zintegrowane

Stanisław Cichocki
Natalia Nehrebecka

Wykład 2

Plan wykładu

- ▶ 1. Szereg czasowy
- ▶ 2. Sezonowość
- ▶ 3. Zmienne stacjonarne
- ▶ 4. Zmienne zintegrowane

Plan wykładu

- ▶ 1. Szereg czasowy
- ▶ 2. Sezonowość
- ▶ 3. Zmienne stacjonarne
- ▶ 4. Zmienne zintegrowane

Szereg czasowy

- ▶ Szereg czasowy jest pojedynczą realizacją pewnego procesu stochastycznego.

Szereg czasowy

Kurs USD/PLN	Data
20.02.2017	4,0692
21.02.2017	4,0942
22.02.2017	4,0899
23.02.2017	4,0840
24.02.2017	4,0681

Szereg czasowy

<http://www.bankier.pl/inwestowanie/profile/quote.html?symbol=ROPA>

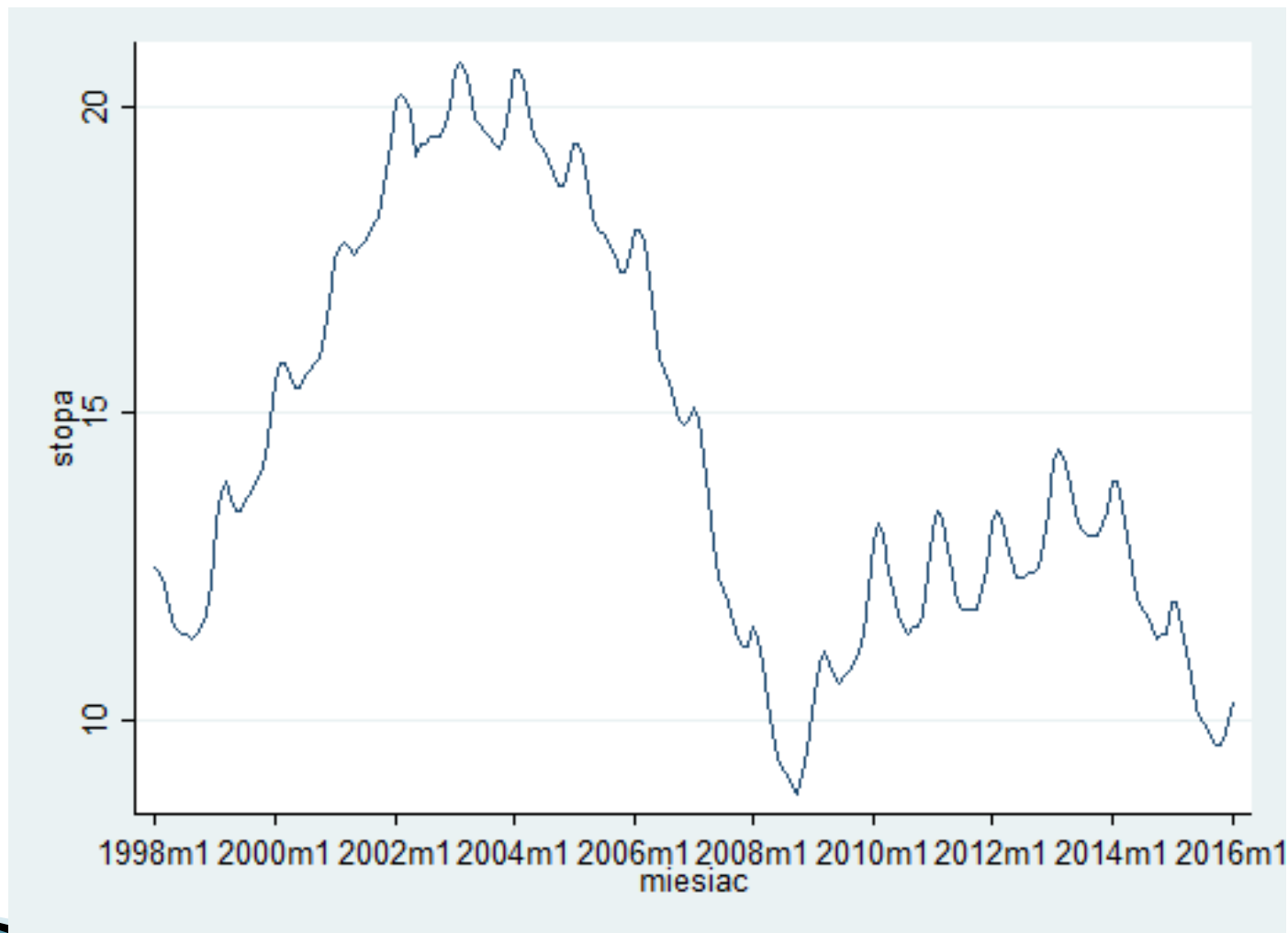
Plan wykładu

- ▶ 1. Szereg czasowy
- ▶ 2. Sezonowość
- ▶ 3. Zmienne stacjonarne
- ▶ 4. Zmienne zintegrowane

Sezonowość

- ▶ O sezonowości mówimy wtedy gdy zmienna zmienia się w pewnym cyklu, zwykle związanym z cyklem kalendarzowym.
 - Np. zmienne kwartalne charakteryzują się sezonowością kwartalną a zmienne miesięczne charakteryzują się sezonowością miesięczną
- ▶ Sezonowość w danych może pojawiać się z różnych powodów:
 - czynniki klimatyczne (spadek wartości dodanej w budownictwie w okresie zimowym);
 - czynniki kulturowe (wzrost wartości sprzedaży w okresie świąt).

Sezonowość



Sezonowość

- ▶ Sezonowości należy uwzględnić w modelu jeśli ma ona wpływ na związek między zmienną objaśniającą a objaśnianą:
 - jeśli w modelu nie zostanie uwzględniona sezonowość to pojawi się ona w resztach, które nie będą spełniały założeń KMRL.

Sezonowość

- ▶ Uwzględnienie problemu sezonowości w procesie estymacji:
 - a) posłużenie się danymi wyrównanymi sezonowo (publikowane przez urzędy statystyczne; samodzielnie można usunąć sezonowość z danych np. korzystając z programu TRAMO/SEATS);
 - b) dodanie do modelu zmiennych zerojedynkowych związanych z poszczególnymi miesiącami/kwartalami;

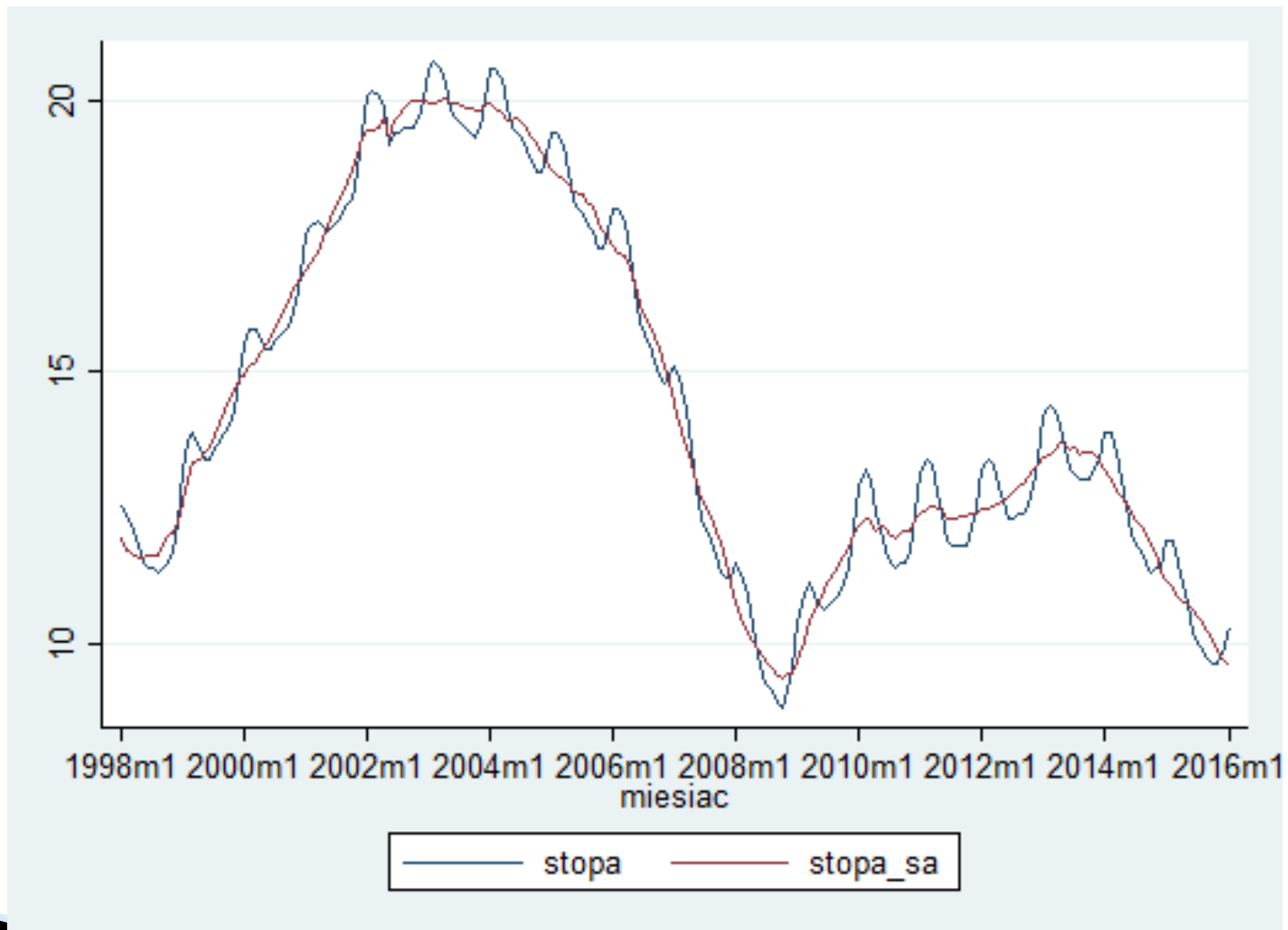
Sezonowość

- ▶ Uwzględnienie problemu sezonowości w procesie estymacji:
 - c) zastosowanie różnicowania sezonowego: zamiast pierwotnych zmiennych stosujemy różnice między tymi zmiennymi a wartościami tych samych zmiennych sprzed roku:

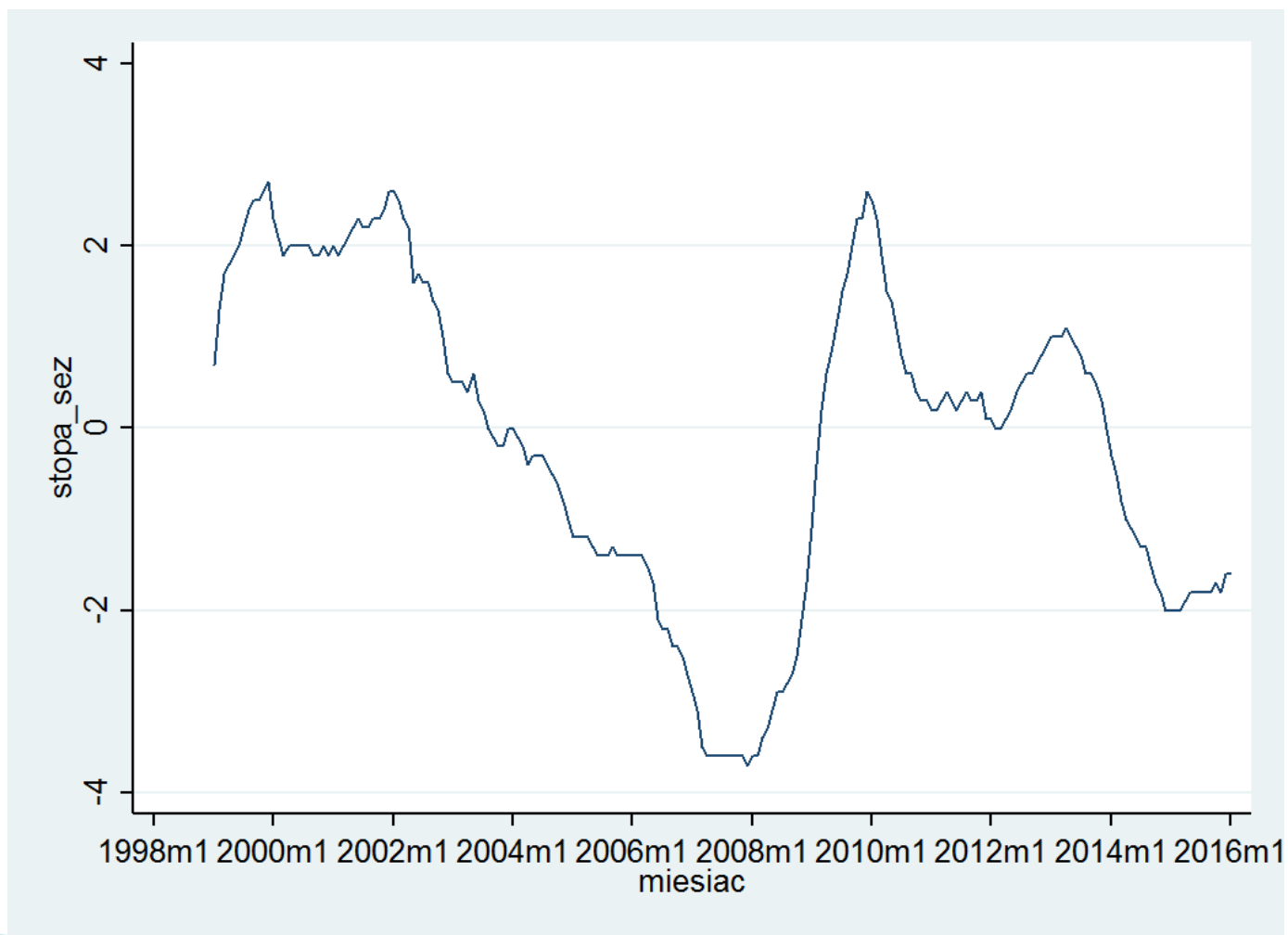
$$\Delta_s y_t = y_t - y_{t-s}$$

gdzie: $s=4$ dla zmiennych kwartalnych
 $s=12$ dla zmiennych miesięcznych itd.

Sezonowość



Sezonowość



Plan wykładu

- ▶ 1. Szereg czasowy
- ▶ 2. Sezonowość
- ▶ 3. Zmienne stacjonarne
- ▶ 4. Zmienne zintegrowane

Zmienne stacjonarne

- ▶ Zmienna jest stacjonarna w sensie słabym (stacjonarność kowariancyjna) jeśli:
 - $E(y_t) = \mu < \infty$ - wartość oczekiwania jest skończona i stała w czasie
 - $Var(y_t) = \sigma^2 < \infty$ - wariancja jest skończona i stała w czasie
 - $Cov(y_{t1}, y_{t1+h}) = Cov(y_{t2}, y_{t2+h}) = \gamma_h$ - dla dowolnych $t1, t2, h$ kowariancje między realizacjami y_t zależą jedynie od dystansu w czasie h

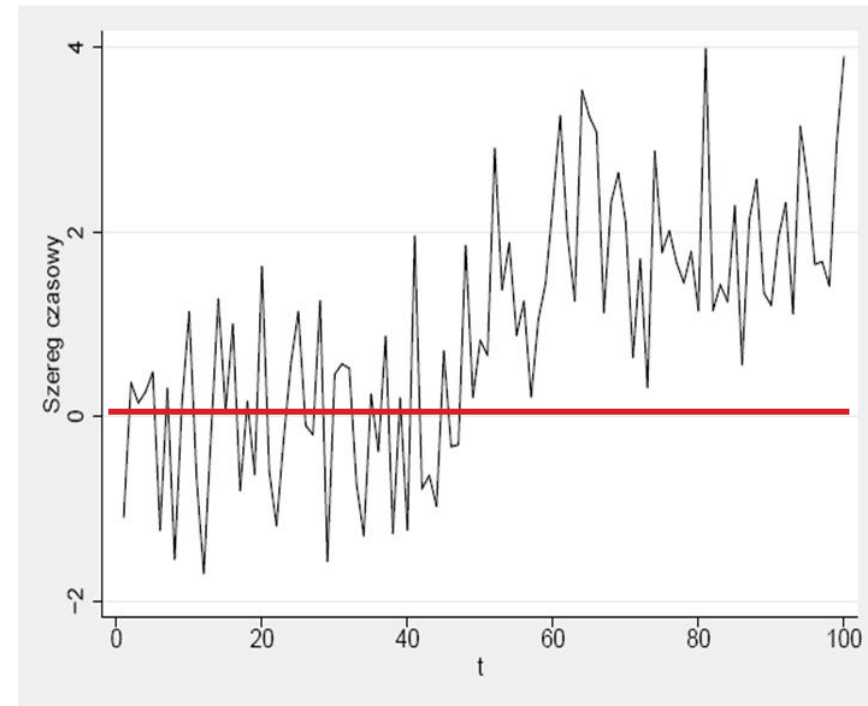
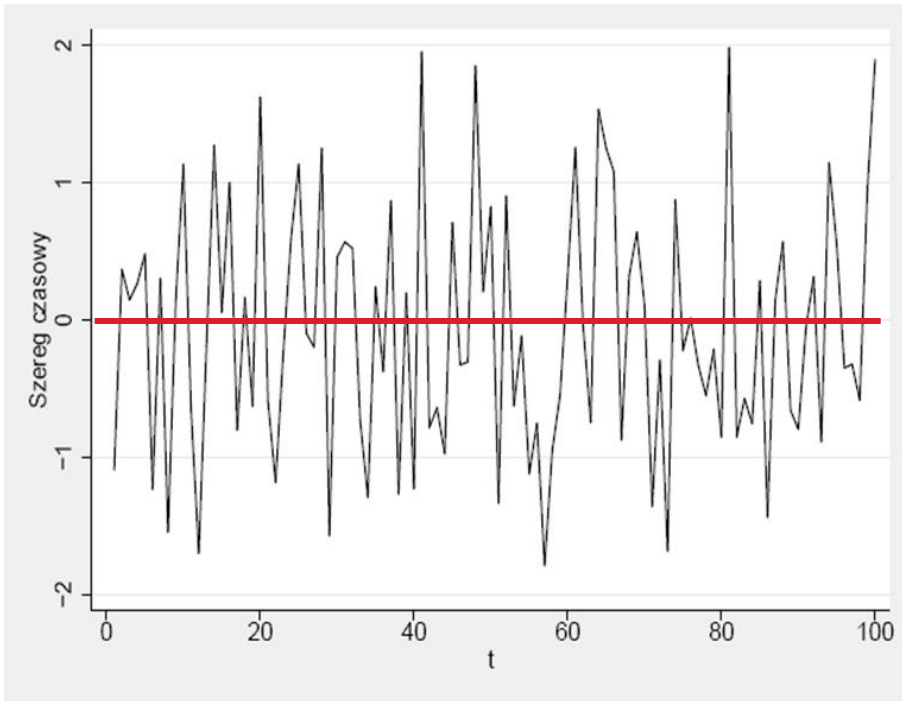
Intuicyjne: zmienna stacjonarna to zmienna, której własności nie zmieniają się w czasie.

Zmienne stacjonarne

- ▶ Jeśli któryś z warunków nie jest spełniony: zmienna niestacjonarna.

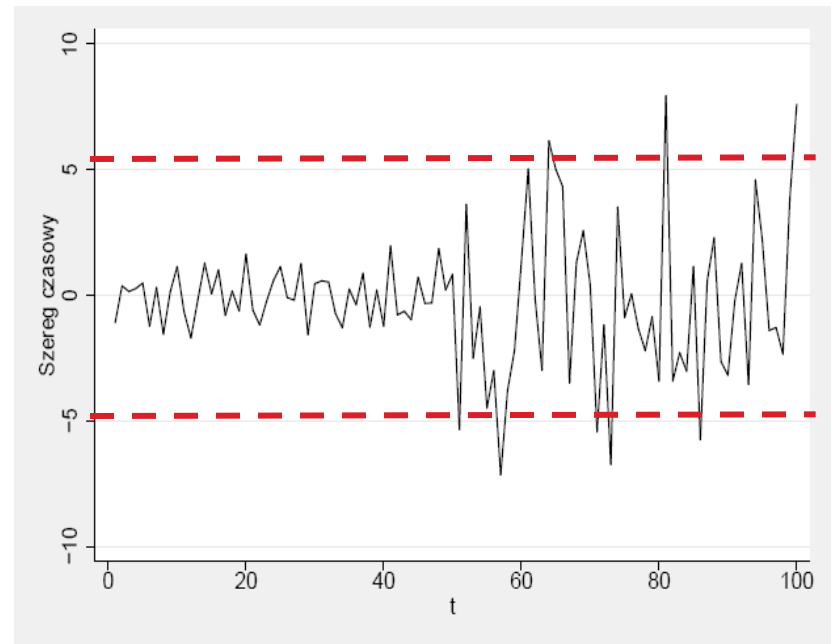
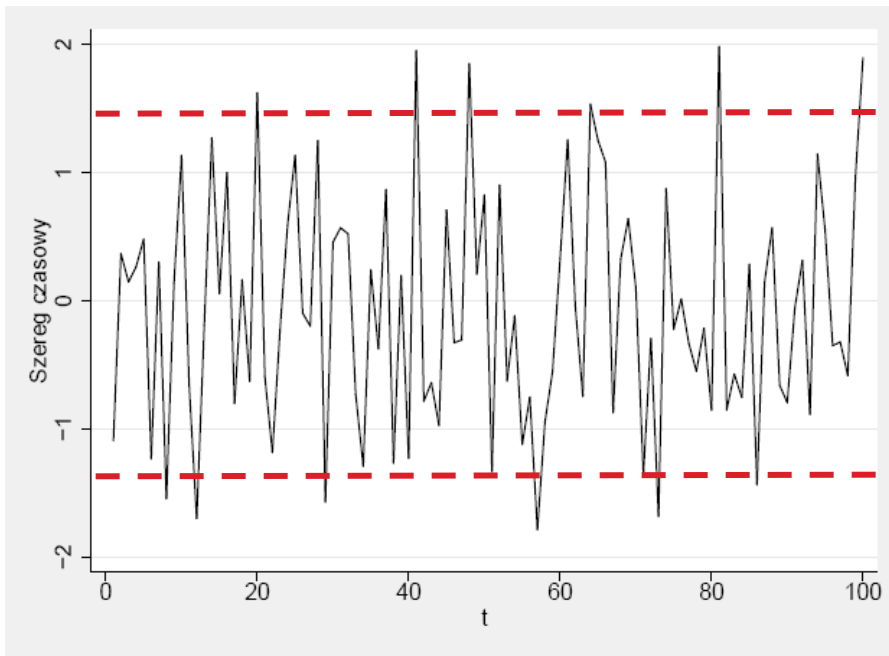
Zmienne stacjonarne

$E(y_t) = \mu < \infty$ - wartość oczekiwania jest skończona i stała w czasie



Zmienne stacjonarne

$Var(y_t) = \sigma^2 < \infty$ - wariancja jest skończona i stała w czasie



Zmienne stacjonarne

- ▶ Przykład zmiennej stacjonarnej: biały szum (white noise):

$$x_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

IID (Independently and Identically Distributed) – realizacje x_t są niezależne i mają identyczne rozkłady.

Zmienne stacjonarne

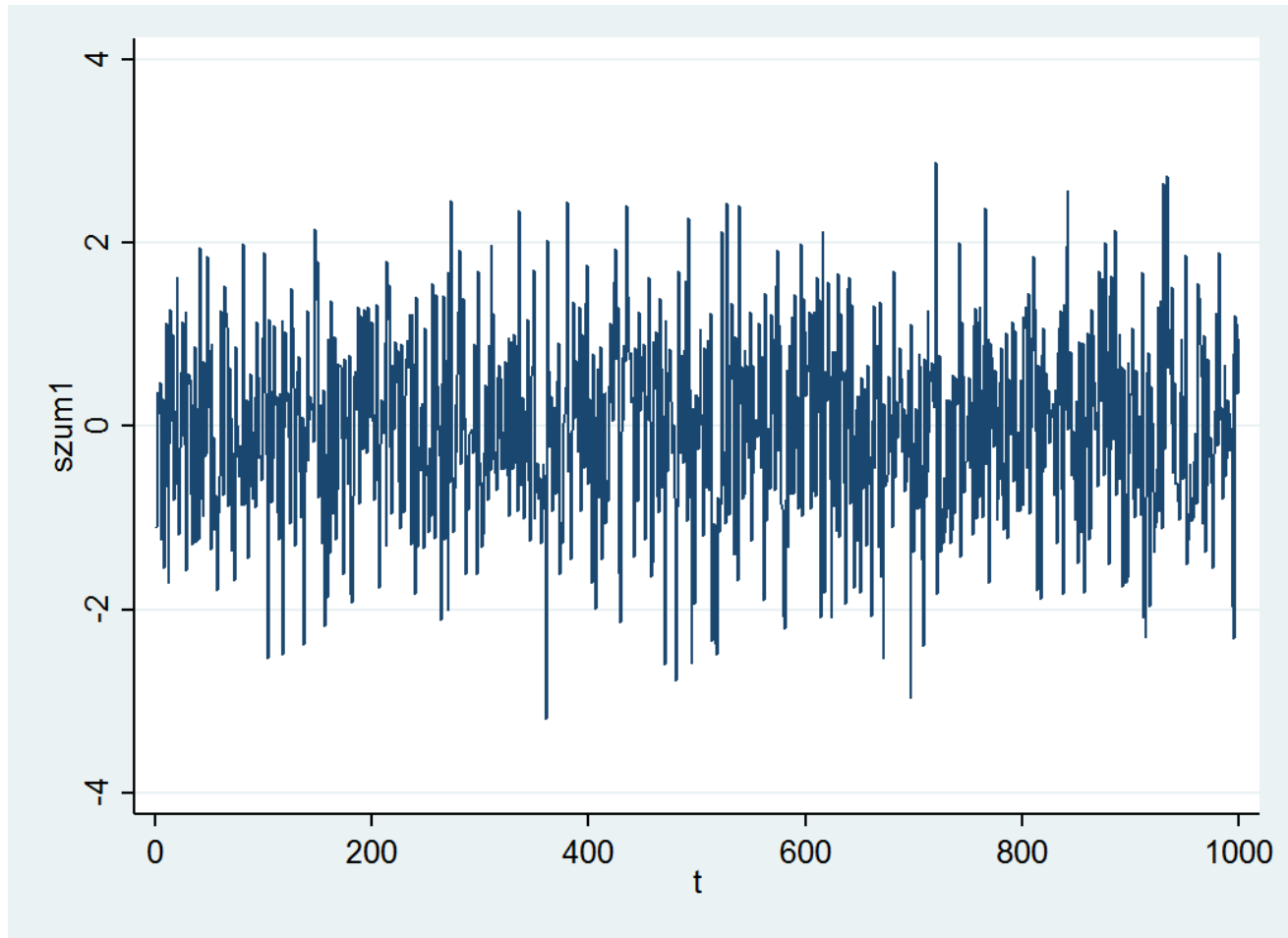
- ▶ Dla białego szumu:

$$E(x_t) = 0 < \infty$$

$$Var(x_t) = \sigma^2 < \infty$$

$$Cov(x_t, x_s) = 0 \quad \text{dla } t \neq s$$

Zmienne stacjonarne



Zmienne stacjonarne

- ▶ Przykład zmiennej stacjonarnej: model AR(1) dla $|\alpha| < 1$

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

Zmienne stacjonarne

- ▶ Przykład zmiennej stacjonarnej: model AR(1) dla $|\alpha| < 1$

$$E(y_t) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E(\varepsilon_{t-i}) = 0$$

$$Var(y_t) = Var\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{2i} Var(\varepsilon_{t-i}) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

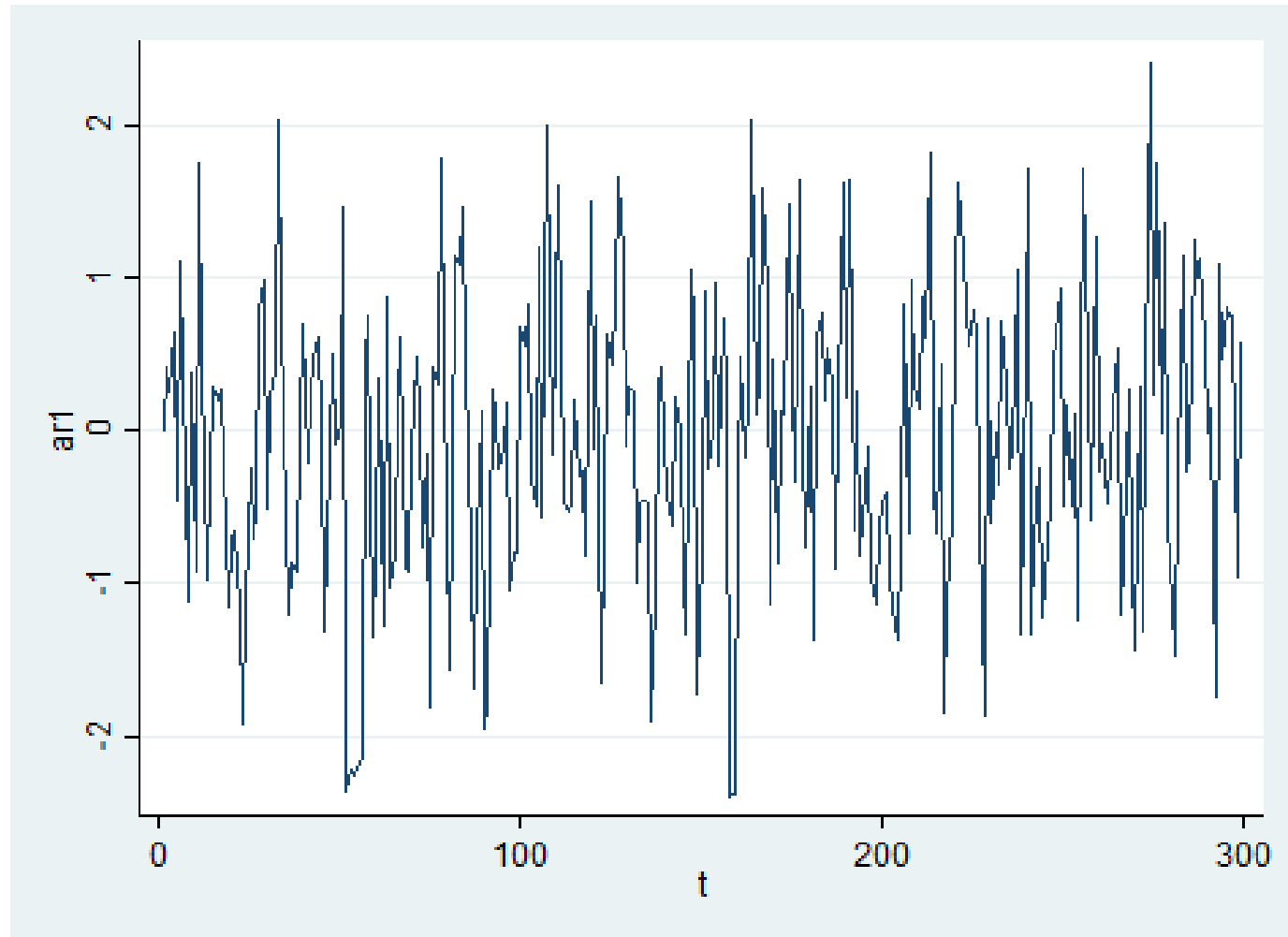
Zmienne stacjonarne

- ▶ Przykład zmiennej stacjonarnej: model AR(1) dla $|\alpha| < 1$

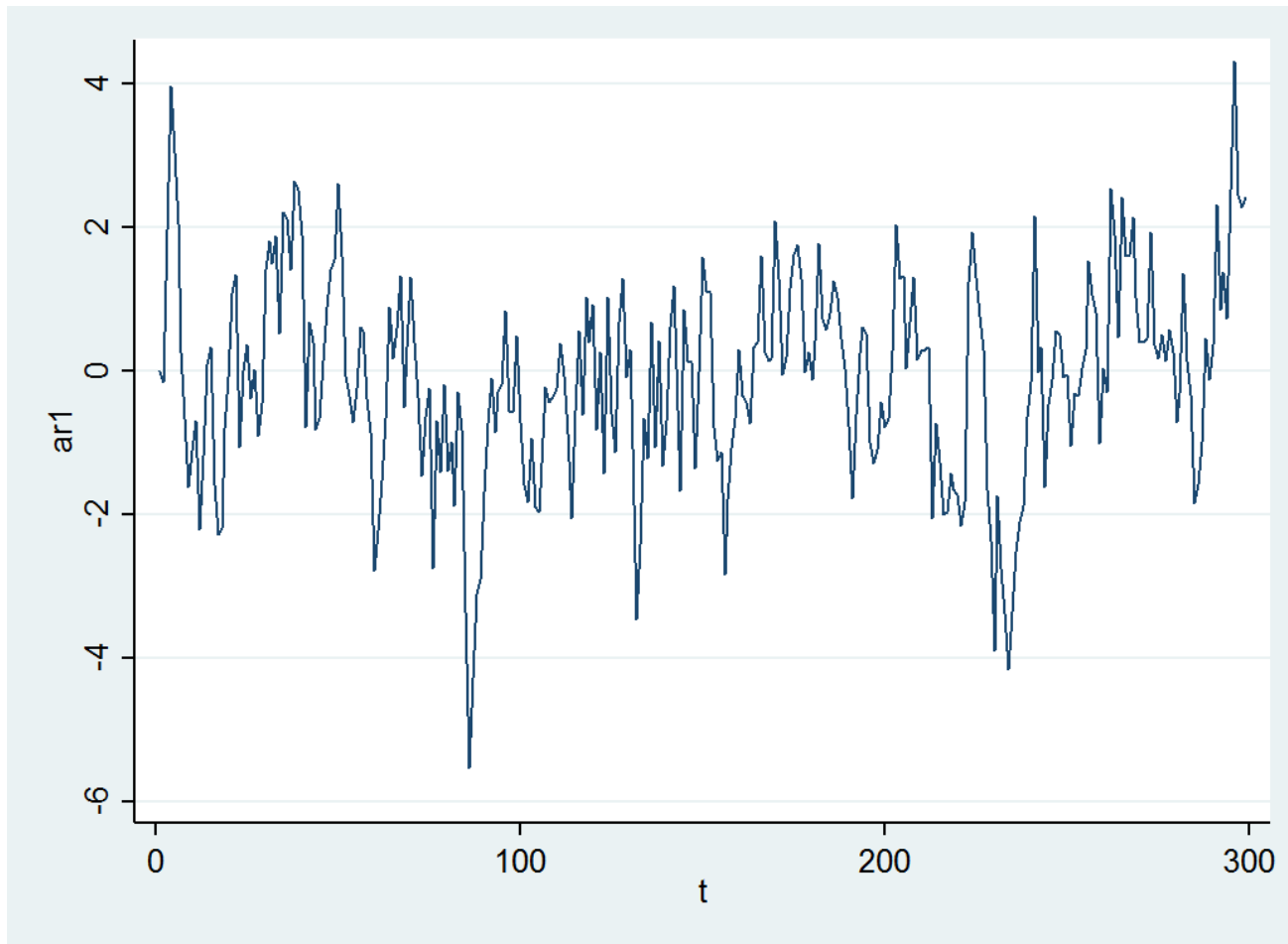
$$\text{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \text{Cov}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i}, \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i-h}\right) =$$

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=0}^{h-1} \alpha^i \varepsilon_{t-i} + \alpha^h \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i-h}, \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i-h}\right) = \alpha^h \sum_{i=h}^{\infty} \alpha^{2i} \text{Var}(\varepsilon_{t-i-h}) = \alpha^h \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

Zmienne stacjonarne



Zmienne stacjonarne



Zmienne stacjonarne

- ▶ Przykład zmiennej niestacjonarnej: błądzenie przypadkowe (random walk)

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

Zmienne stacjonarne

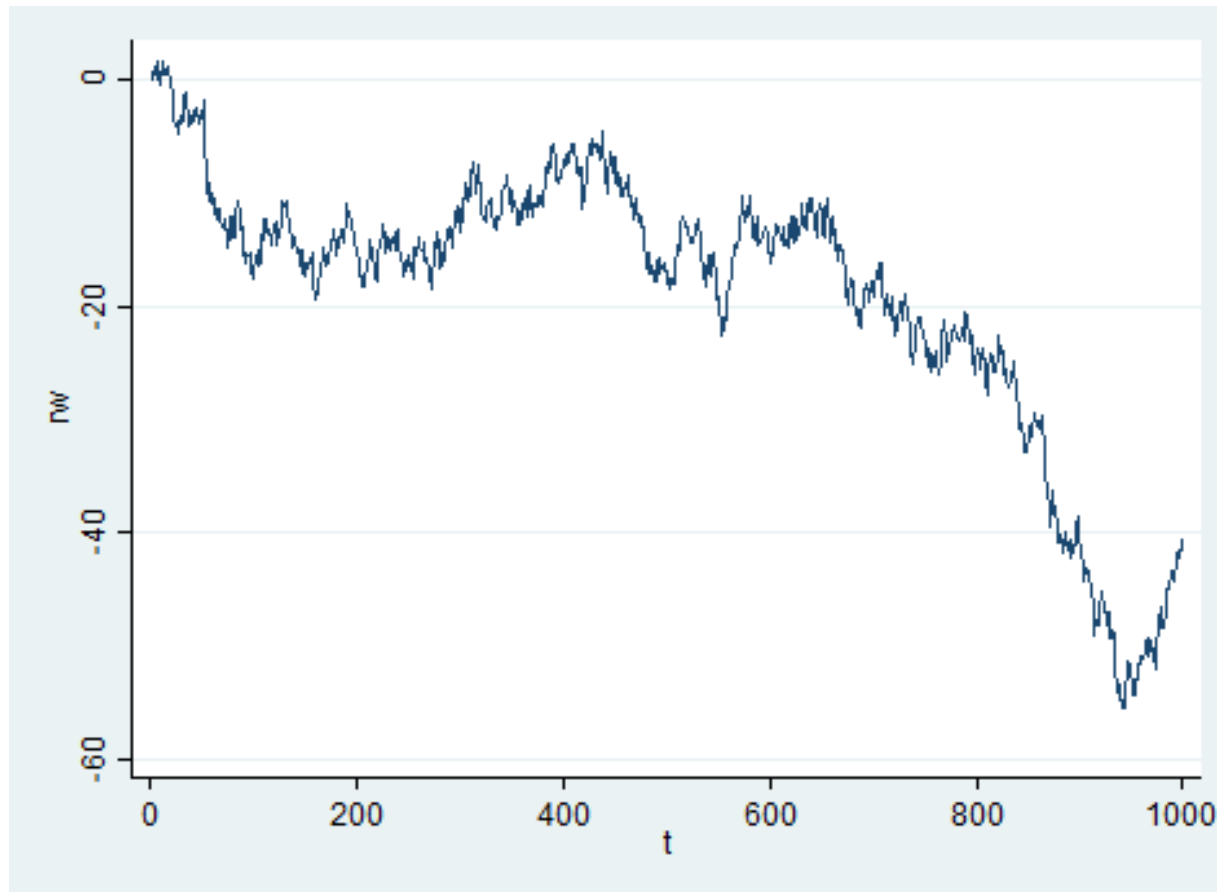
- ▶ Przykład zmiennej niestacjonarnej: błądzenie przypadkowe (random walk)

$$E(y_t) = 0$$

$$\text{Var}(y_t) = \sum_{s=1}^t \text{Var}(\varepsilon_s) = t\sigma^2$$

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \sum_{s=1}^{t-h} \text{Var}(\varepsilon_s) = (t-h)\sigma^2$$

Zmienne stacjonarne



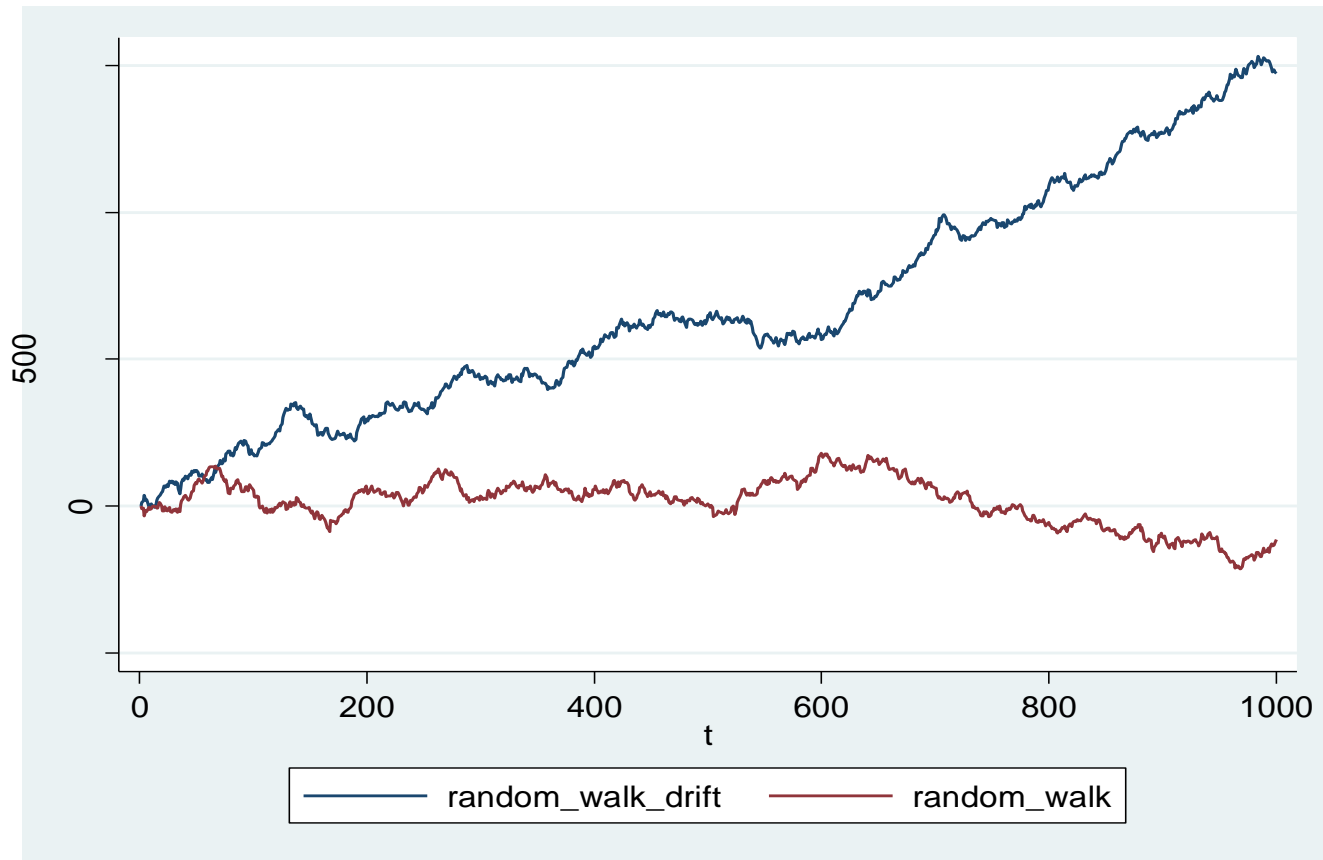
Zmienne stacjonarne

- ▶ Przykład zmiennej niestacjonarnej: błądzenie przypadkowe z dryfem

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

Zmienne stacjonarne



Zmienne stacjonarne

- ▶ Standardowa definicja stacjonarności w wielu przypadkach okazuje się zbyt restrykcyjna: zmienne ekonomiczne oscylują nie tyle wokół stałej ale wokół pewnego trendu.
- ▶ Zmienna stacjonarna wokół trendu (trendostacjonarna) jeśli odchylenie od trendu:

$$y_t - E(y_t)$$

jest stacjonarne.

Zmienne stacjonarne

- ▶ Przykład zmiennej trendostacjonarnej: trend liniowy

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

$$E(y_t) = \alpha + \beta t$$

$$y_t - E(y_t) = \varepsilon_t$$

Plan wykładu

- ▶ 1. Szereg czasowy
- ▶ 2. Sezonowość
- ▶ 3. Zmienne stacjonarne
- ▶ 4. Zmienne zintegrowane

Zmienne zintegrowane

- ▶ Zmienne zintegrowane: zmienne niestacjonarne, które można sprowadzić do stacjonarności poprzez różnicowanie.
- ▶ Zmienna, która po zastosowaniu d-tych różnic staje się zmienną stacjonarną oznaczamy jako:

$$y_t \sim I_d$$

- ▶ Mówimy, że zmienna y_t jest zintegrowana rzędu d.
- ▶ Zmienne stacjonarne są zintegrowane rzędu 0:

$$y_t \sim I(0)$$

Zmienne zintegrowane

- ▶ Przykład zmiennej niestacjonarnej: błądzenie przypadkowe (random walk)

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$$

- ▶ Różnicując zmienną y_t :

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

Biały szum, zmienna I(0). Wobec tego błądzenie przypadkowe jest zmienną I(1)

Pytania teoretyczne

1. Wyjaśnić co to znaczy, że w danych występuje sezonowość i omówić sposoby uwzględniania sezonowości w procesie modelowania.
2. Podać definicję zmiennej stacjonarnej i trendostacjonarnej.
3. Wyjaśnić, co to są zmienne $I(0)$ i $I(1)$ i udowodnić, że biały szum jest zmienną $I(0)$ a błądzenie przypadkowe zmienną $I(1)$.

Dziękuję za uwagę