Założenie o proporcjonalności szans

Jerzy Mycielski

26 marca 2019

Szanse dla modelu uporządkowanego

- Prawdopodobieństwo zaobserwowania alternatyw mniejszych lub równych k

$$\begin{aligned} Pr(y \leq k|\mathbf{x}) &= F(\alpha_1 - \mathbf{x}\beta) + \sum_{i=1}^{k} (F(\alpha_{i+1} - \mathbf{x}\beta) - F(\alpha_i - \mathbf{x}\beta)) \\ &= F(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta) \end{aligned}$$

- Prawdopodobieństwo zaobserwowania alternatyw większych niż k

$$\begin{aligned} Pr(y > k|\mathbf{x}) &= \sum_{i=k+1}^{J-1} (F(\alpha_{i+1} - \mathbf{x}\beta) - F(\alpha_i - \mathbf{x}\beta)) + 1 - F(\alpha_J - \\ &= 1 - F(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta) \end{aligned}$$

- Szansa dla alternatyw $y \leq k$ w stosunku do alternatyw $y > k$

$$Odds(y > k, y \leq k) = \frac{1 - F(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta)}{F(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta)}$$

Szans i iloraz szans dla modelu uporządkowanego logitowego

- Szansa dla modelu uporządkowanego logitowego

$$Odds\,(y > k, y \leq k|\mathbf{x}) = \frac{1 - \frac{exp(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta)}{1 + exp(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta)}}{\frac{exp(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta)}{1 + exp(\alpha_{k+1} - \mathbf{x}\beta)}} = exp\,(\mathbf{x}\beta - \alpha_{k+1})$$

- Iloraz szans dla modelu uporządkowanego logitowego

$$\frac{Odds\,(y > k, y \leq k|\mathbf{x} + \triangle\mathbf{x})}{Odds\,(y > k, y \leq k|\mathbf{x})} = \frac{exp\,((\mathbf{x} + \triangle\mathbf{x})\,\beta - \alpha_{k+1})}{exp\,(\mathbf{x}\beta - \alpha_{k+1})} = exp\,(\triangle\mathbf{x}\beta)$$

- Zauważmy, że iloraz szans nie zależy od k
- Ta własność modelu uporządkowanego logitowego nazywana jest założeniu o proporcjonalności szans (proportional odds)
- Można ją przetestować definiując k zmiennych zero-jedynkowych $D_k = \mathbb{I}(y > k)$, szacując dla każdej z nich model zwykły model logitowy i weryfikując czy policzone ilorazy szans są faktycznie równe (test ten bardzo często odrzuca H_0.