

Wstęp

W pracy przedstawiono wyniki analizy dwóch szeregów czasowych – sezonowego dotyczącego liczby mieszkań oddanych do użytkowania oraz niesezonego dotyczącego liczby funkcjonujących oddziałów banków. Obydwa szeregi dotyczą danych dla Polski. Szereg sezonowy ma charakter danych kwartalnych z lat 2000-2017, niesezonego danych miesięcznych z lat 2010-2017.

Dla każdego z szeregów dokonana zostanie dekompozycja, następnie dopasowany zostanie model z klasy ARIMA/SARIMA i model ekstrapolacyjny oraz dokonane zostanie porównanie jakości prognoz z tych modeli.

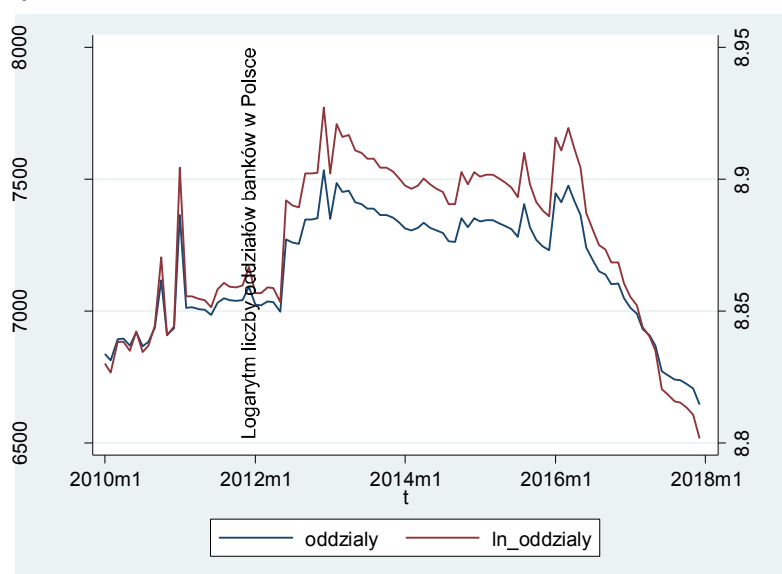
1. Szereg niesezonego

1.1. Opis szeregu

Analizowany szereg niesezonego, to liczba oddziałów banków w Polsce. Dane pochodzą z publikowanego przez Komisję Nadzoru Finansowego¹ zestawienia danych miesięcznych sektora bankowego (plik według stanu na grudzień 2017). Jako liczba oddziałów rozumiana jest liczba oddziałów w kraju, tj. z wyłączeniem oddziałów za granicą. Szereg obejmuje dane miesięczne od stycznia 2010 do grudnia 2017 (96 obserwacji).

Publikowane dane odnoszą się do dokładnej liczby oddziałów (co do jednego) – liczba oddziałów w kolejnych miesiącach wynosi od ok. 6,5 tys. do 7,5 tys. W celu uproszczenia prezentacji danych oraz w szczególności ograniczenia wariacji wartości szeregu, na etapie doboru modeli stosowany będzie szereg po przekształceniu logarytmicznym ($\ln_oddzialy$).

Wykres 1 Liczba oddziałów banków w Polsce



¹ https://www.knf.gov.pl/publikacje_i_opracowania/dane_statystyczne/bankowy

1.2. Dekompozycja szeregu

Na podstawie wykresu szeregu (Wykres 1) wnioskować można, że nie występują w nim wahania sezonowe. Ponadto nie jest widoczny wyraźny trend – w latach 2010-2012 obserwowany był wzrost liczny oddziałów (trend stochastyczny), w latach 2013 -2016 liczba oddziałów utrzymywała się na stabilnym poziomie, a począwszy od roku 2016 liczba oddziałów systematycznie maleje.

Brak sezonowości oraz wyraźnego trendu potwierdza analiza z wykorzystaniem procedury Tramo-Seats w aplikacji Demetra. Szereg odsezonowany różni się tylko nieznacznie od szeregu oryginalnego (*oddziały*). Również wyznaczona linia trendu nie odbiega od pierwotnych wartości szeregu (z pominięciem skokowych wartości w styczniu 2011 i listopadzie 2012 - styczniu 2013).

Wykres 2 Dekompozycja szeregu oddziały



Dekompozycja szeregu nie doprowadziła zatem do wyraźnego wyodrębnienia jego składowych. Szereg nie charakteryzuje się trendem, który mógłby być jednoznacznie zaklasyfikowany jako addytywny czy multiplikatywny – a przynajmniej nie jest to możliwe do określenia dla stosowanego okna czasowego 8 lat.

1.3. Model ARIMA

1.3.1. Stacjonarność szeregu

W pierwszym kroku identyfikacji postaci modelu ARIMA, za pomocą testu Dickey-Fullera (DF) i testu rozszerzonego testu Dickey-Fullera (ADF) określono stopień zintegrowania szeregu *ln_oddziały*.

Wyniki testu Breucha-Godfrey (B-G) dla reszt w równaniu testu DF wskazują na występowanie autokorelacji reszt. Wartości p-value dla statystyki testowej dla wszystkich opóźnień od 1 do 6 wynoszą poniżej 0,05², należy odrzucić hipotezę zerową testu B-G o braku autokorelacji reszt i zamiast testu DF zastosować test ADF. Po uwzględnieniu 2 rozszerzeń w teście ADF wyniki testu B-G dla reszt potwierdzają brak autokorelacji dla wszystkich reszt opóźnionych o od 1 do 6 okresów. Wartości p-value dla opóźnień od 1 do 6 wynoszą bowiem powyżej 0,05, a zatem brak jest podstaw do odrzucenia

² Interpretacja wszystkich testów w przeprowadzona została na poziomie istotności $\alpha=0,05$.

hipotezy zerowej o braku autokorelacji reszt. Możliwa jest interpretacja wyników testu ADF z 2 rozszerzeniami.

Tabela 1 Wyniki testu Breusch-Godfrey dla reszt w równaniu testu DF i ADF

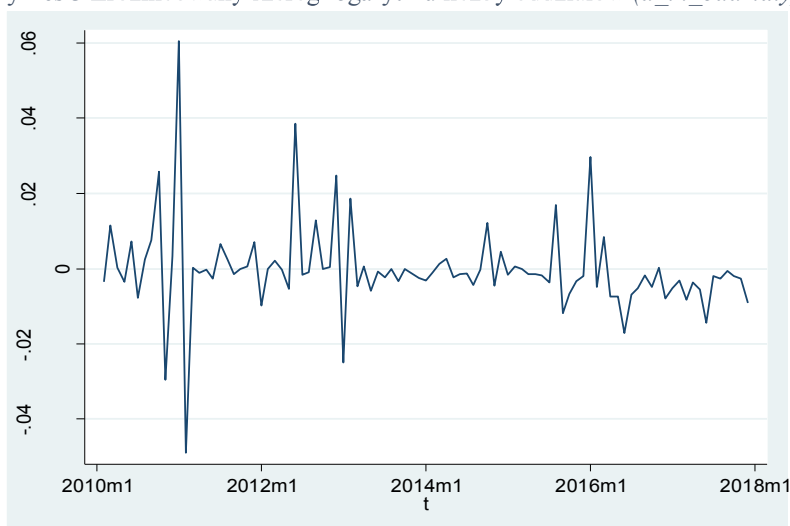
Opóźnienie	Test DF		Test ADF z 1 rozszerzeniem		Test ADF z 2 rozszerzeniami	
	Statystyka testu B-G	p-value	Statystyka testu B-G	p-value	Statystyka testu B-G	p-value
1	10,129	0,0015	2,980	0,0843	2,174	0,1403
2	0,1850	0,0014	5,092	0,0784	4,652	0,0977
3	16,061	0,0011	8,298	0,0402	4,702	0,1950
4	17,421	0,0016	8,299	0,0812	4,792	0,3093
5	17,446	0,0037	8,366	0,1372	4,871	0,4318
6	17,535	0,0075	8,641	0,1948	5,344	0,5005

Wartość statystyki testowej testu ADF z 2 rozszerzeniami dla zmiennej $\ln_oddzialy$ (-0,307) jest większa od wartości krytycznej na poziomie istotności 0,05 (-2,896), brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu ADF mówiącą o niestacjonarności analizowanego szeregu. Szereg $\ln_oddzialy$ jest niestacjonarny. Konieczne jest przeprowadzenie testu ADF dla zmiennej jednokrotnie zróżnicowanej ($d_ln_oddzialy$ – przedstawionej na Wykresie 3).

Tabela 2 Wyniki testu ADF z 2 rozszerzeniami dla zmiennej $\ln_oddzialy$

Wartość statystyki testowej	Wartość krytyczna testu, na poziomie istotności:		
	1%	5%	10%
- 0,307	-3.520	-2.896	-2.583

Wykres 3 Zróżnicowany szereg logarytmu liczby oddziałów ($d_ln_oddzialy$)



Dla szeregu $d_ln_oddzialy$ wyniki testu B-G również wskazują na występowanie autokorelacji reszt z równania testu DF (wartości p-value poniżej 0,05 dla 3 opóźnienia). Uwzględnienie jednego rozszerzenia w teście ADF wyeliminowało ten problem – na poziomie istotności 0,05 brak jest

podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu B-G, mówiącej o braku autokorelacji reszt (p-value dla opóźnień 1-6 w teście z 1 rozszerzeniem przekraczają 0,05).

Tabela 3 Wyniki testu Breusch-Godfrey dla reszt w równaniu testu DF i ADF dla zmiennej zróżnicowanej ($d \ln_oddzialy$)

Opóźnienie	Test DF		Test ADF z 1 rozszerzeniem	
	Statystyka testu B-G	p-value	Statystyka testu B-G	p-value
1	3,491	0,0617	1,946	0,1630
2	5,542	0,0626	4,088	0,1295
3	7,964	0,0468	4,111	0,2497
4	8,073	0,0889	4,118	0,3902
5	8,121	0,1497	4,125	0,5316
6	8,230	0,2218	4,434	0,6181

Wartość statystyki testowej testu ADF z jednym rozszerzeniem dla zmiennej $\ln_oddzialy$ (-9,59) jest mniejsza od wartości krytycznej na poziomie istotności 0,05 (-1,950), należy odrzucić hipotezę zerową testu o niestacjonarności analizowanego szeregu. Szereg $d \ln_oddzialy$ jest stacjonarny, a szereg $\ln_oddzialy$ jest zintegrowany w stopniu pierwszym.

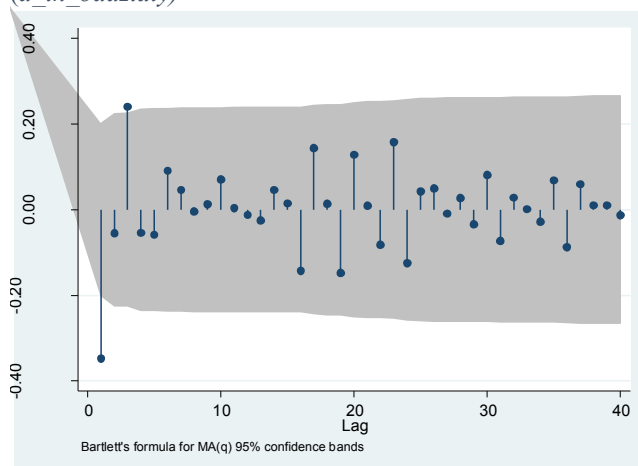
Tabela 4 Wyniki testu ADF z 1 rozszerzeniem dla zmiennej zróżnicowanej ($d \ln_oddzialy$)

Wartość statystyki testowej	Wartość krytyczna testu, na poziomie istotności:		
	1%	5%	10%
-9,590	-2,603	-1,950	-1,610

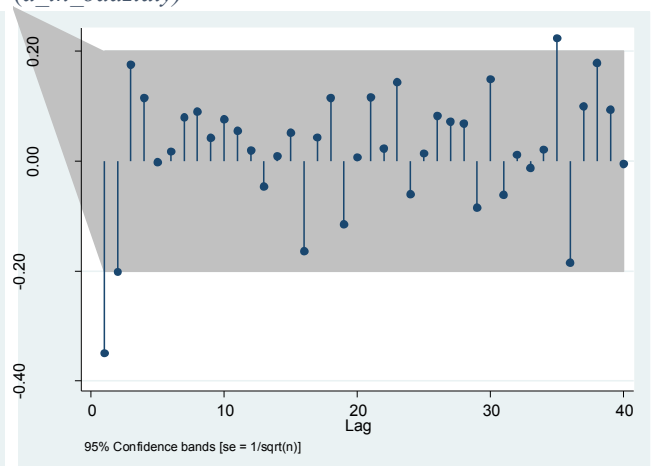
1.3.2. Identyfikacja i weryfikacja

W kolejnym kroku określone zostaną rzędy procesów AR i MA. Analiza funkcji PACF (Wykres 5), wskazuje, iż dla procesu AR potencjalnie należy uwzględnić jedno lub dwa opóźnienia ($p=1$ lub $p=2$), w szczególności za istotne uznawane jest opóźnienie pierwsze. W przypadku funkcji ACF, w procesie MA istotne jest również pierwsze opóźnienie, ewentualnie należy rozważyć dodanie opóźnienia trzeciego ($q=1$ lub $q=3$).

Wykres 4 Funkcja ACF dla zmiennej zróżnicowanej ($d \ln_oddzialy$)



Wykres 5 Funkcja PACF dla zmiennej zróżnicowanej ($d \ln_oddzialy$)



W celu wyboru optymalnego modelu ARIMA przetestowano różne warianty modelu uwzględniające rzędy procesów p i q wynoszące od 0 do 3. Modele szacowane były dla szeregu $\ln_oddziały$, przy uwzględnieniu parametru zintegrowania $d=1$. Po stopniowej eliminacji opóźnień nieistotnych statystycznie ostatecznie uzyskano cztery warianty modelu ARIMA z następującymi parametrami p, d, q: (1,1,2), (2,1,0), (1,1,0), (0,1,1). Ostatecznie wybrane modele oszacowano na próbie danych do 2017m11 (dla modeli z maksymalnie 1 opóźnieniem p i q) i danych do 2017m10 (dla modeli z 2 opóźnieniami p lub q). Próby *in-sample* dobrane zostały tak by jednocześnie zapewnić odpowiednią próbę do prognozowania *out-of-sample* (1 lub 2 miesięczną).

Tabela 5 Wyniki estymacji modeli ARIMA dla zmiennej $\ln_oddziały$

	ARIMA (1,1,2)		ARIMA(2,1,0)		ARIMA (1,1,0)		ARIMA (0,1,1)	
	Z	p-value	Z	p-value	Z	p-value	Z	p-value
Stała	-0,13	0,897	-0,17	0,862	-0,16	0,876	-0,18	0,860
ARMA AR L1	2,41	0,016	-5,41	0,000	-5,27	0,000		
AR L2			-2,09	0,037	-	-		
MA L1	-3,38	0,001	-	-	-	-	-4,57	0,000
MA L2	2,23	0,001	-	-	-	-		
Logarytm funkcji wiarygodności	285,1602		284,7805		286,3259		268,9488	

Dla wszystkich wariantów modelu ARIMA, wyniki testu Ljunga-Boxa potwierdziły, że reszty w modelu są białym szumem (wartość p-value dla statystyki testowej Q powyżej 0,05 wskazują na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, zgodnie z którą reszty są białym szumem). Modele nie wymagają uwzględniania dodatkowych opóźnień.

Tabela 6 Wyniki testy Ljunga-Boxa dla reszt z modeli ARIMA dla zmiennej $\ln_oddziały$

	ARIMA (1,1,2)	ARIMA(2,1,0)	ARIMA (1,1,0)	ARIMA (0,1,1)
Statystyka testowa Q	18,4214	19,4279	26,3778	23,6411
P-value	0,9986	0,9975	0,9520	0,9815

Wartości kryteriów informacyjnych AIC i BIC wskazują, iż najlepszym spośród analizowanych modeli jest model ARIMA (0,1,1) – wartości obydwu kryteriów przyjmują dla niego najniższe wartości. Spośród modeli uwzględniających więcej niż jedno opóźnienia ($p>1$ lub $q>1$) lepszy okazał się model ARIMA(2,1,0), przy czym jest on jednak gorszy niż każdy z dwóch modeli ARIMA uwzględniających maksymalnie 1 opóźnienie AR lub MA. Zaletą modelu ARIMA(2,1,0) jest jednak to, że może być wykorzystany do prognozy na więcej niż 1 okres.

Tabela 7 Kryteria informacyjne dla modeli ARIMA dla zmiennej $\ln_oddziały$

	AIC	BIC
ARIMA (1,1,2)	-560,3204	-547,6574
ARIMA (2,1,0)	-561,5609	-551,4305
ARIMA (1,1,0)	-566,6518	-559,0220
ARIMA (0,1,1)	-567,8975	-560,2676

1.3.3. Prognozowanie

Prognozy dla każdego z analizowanych modeli ARIMA wyznaczono dla liczby obserwacji wynikającej z liczby opóźnień p i q . Dla modeli ARIMA(1,1,0) i ARIMA (0,1,1) prognozę wyznaczono tylko na 1 miesiąc, dla modeli ARIMA(1,1,2) i ARIMA(2,1,0) prognozę wyznaczono na 2 miesiące. W pierwszym kroku prognozy dynamiczne wyznaczono dla zmiennej $d_ln_oddzialy$. Na podstawie wykresu prognozy (Wykres 6) widoczne jest, iż najlepszą prognozą okazała się ta z modelu ARIMA (1,1,2) – zarówno dla prognozy na 2017m11, jak i na 2017m12. Prognoza na 2017m12 jest dla tego modelu lepsza niż prognoza w horyzoncie 1 miesiąca dla wybranego wcześniej modelu ARIMA (1,1,0). Powyższe wnioski potwierdza również porównanie miar oceny jakości prognozy (Tabela 8). Każda z analizowanych miar (MAE, MSE, MAPE, AMAPE) najmniejsze wartości przyjmuje dla modelu ARIMA (1,1,2).

Wykres 6 Prognoza wartości zmiennej zróżnicowanej ($d_ln_oddzialy$) w modelach ARIMA

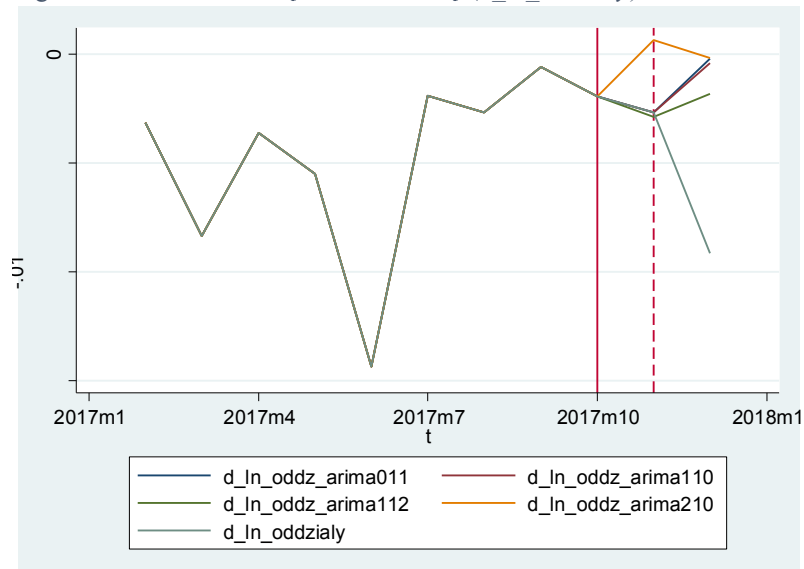


Tabela 8 Błędy prognozy dla zmiennej zróżnicowanej ($d_ln_oddzialy$) w modelach ARIMA

	Prognoza na 2 miesiące		Prognoza na 1 miesiąc	
	ARIMA (1,1,2)	ARIMA(2,1,0)	ARIMA (1,1,0)	ARIMA (0,1,1)
MAE	0,00375	0,00615	0,00873	0,00894
MSE	0,00002	0,00004	0,00008	0,00001
MAPE	0,43596	1,11143	0,95600	0,97829
AMAPE	0,35111	1,29965	0,91571	0,95750

Dla porównania dla Wykresie 7 przedstawiono wartości prognozowane dla szeregu $ln_oddzialy$ tj. bez różnicowania. Tabela 9 zawiera porównanie miar oceny błędu prognozy. Przekształcenie zmiennej nie wpływa na wnioski, co do porównania jakości prognoz pomiędzy wybranymi modelami – za najlepszy model nadal uznawany jest model ARIMA (1,1,2).

Wykres 7 Prognoza na podstawie modelu ARIMA dla zmiennej bez różnicowania ($\ln_oddzialy$)

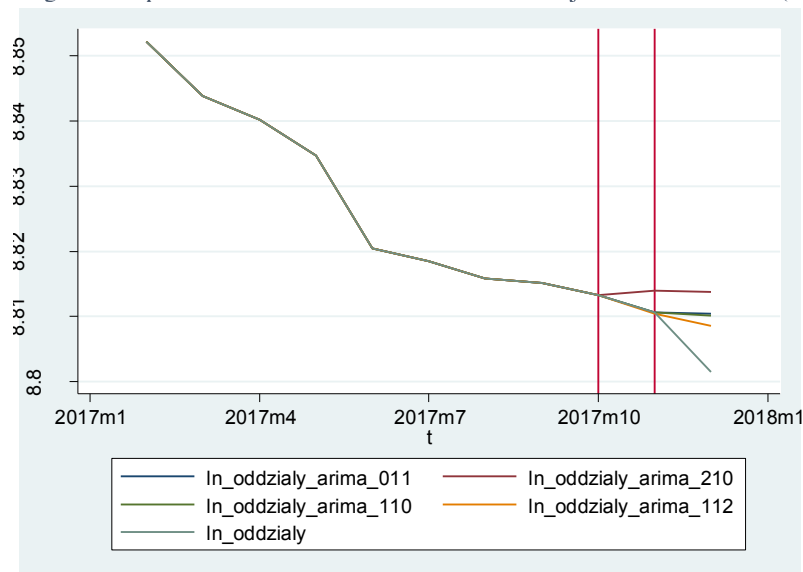


Tabela 9 Błędy prognozy dla zmiennej bez zróżnicowania ($\ln_oddzialy$) na podstawie modeli ARIMA

	Prognoza na 2 miesiące		Prognoza na 1 miesiąc	
	ARIMA (1,1,2)	ARIMA(2,1,0)	ARIMA (1,1,0)	ARIMA (0,1,1)
MAE	0,00365	0,00781	0,00874	0,00894
MSE	0,00002	0,00008	0,00008	0,00007
MAPE	0,00042	0,00089	0,00099	0,00101
AMAPE	0,00021	0,00044	0,00049	0,00051

1.4. Model ekstrapolacyjny

Do porównania wyników uzyskanych w modelu ARIMA, dla szeregu $\ln_oddzialy$ dopasowano model ekstrapolacyjny z klasy modeli liniowych Holta. W celu zachowania porównywalności oceny jakości prognozy z modelem ARIMA (1,1,2), model ekstrapolacyjny wybrano przy założeniu prognozy tylko na 2 miesiące (próba *in-sample*: 2010m1-2017m10, *out-of-sample*: 2017m11-2017m12). Rozważono 5 wariantów modelu liniowego: 4 z różnymi kombinacjami wartości parametrów α i β równymi 0,5 lub 0,3 oraz 1 model z parametrami α i β wygenerowanymi iteracyjnie (określone zostały jako $\alpha=0,5592$, $\beta=0,0756$).

Modelem najlepiej dopasowanym do danych na próbie *in-sample*, zgodnie z oczekiwaniem, okazał się model z parametrami wygenerowanymi w sposób iteracyjnie (najniższe wartości błędów MAE, MSE, MAPE, AMAPE). Spośród modeli z odgórnie narzuconymi parametrami najlepszy okazał się model z parametrami $\alpha=0,5$ $\beta=0,3$ (Tabela 10).

Tabela 10 Błędy dopasowania dla zmiennej ($\ln_oddzialy$) w modelach liniowych Holta (2010m1-2017m10)

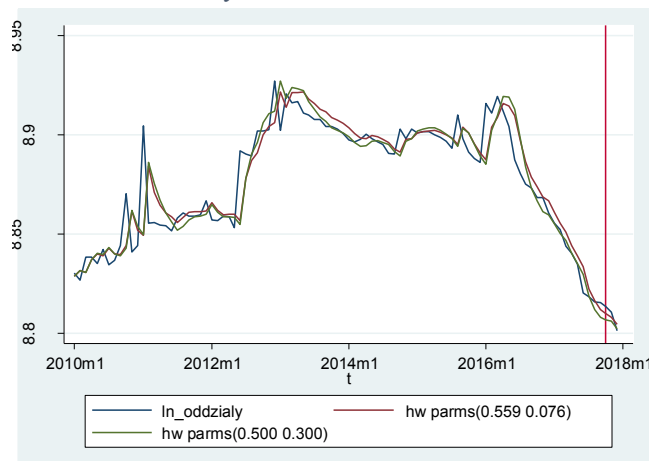
	$\alpha=0,5$ $\beta=0,5$	$\alpha=0,3$ $\beta=0,5$	$\alpha=0,3$ $\beta=0,3$	$\alpha=0,5$ $\beta=0,3$	$\alpha=0,56$ $\beta=0,08$
MAE	0,00755	0,00848	0,00833	0,00723	0,00272
MSE	0,00014	0,00015	0,00014	0,00013	0,00001
MAPE	0,00085	0,00095	0,00094	0,00082	0,00031
AMAPE	0,00042	0,00048	0,00047	0,00041	0,00015

Biorąc pod uwagę jakość prognozy na 2017m11-2017m12 najlepsze wyniki uzyskano dla modelu liniowego Holta z parametrami $\alpha=0,5$ $\beta=0,3$ (najniższe wartości wszystkich miar oceny jakości prognozy – Tabela 11). Model z parametrami wyznaczonymi w sposób iteracyjny był najlepiej dopasowany do danych w próbie *in-sample*, ale charakteryzuje się gorszą jakością prognoz. Porównanie prognozy z modeli Holta z parametrami $\alpha=0,5$ $\beta=0,3$ i $\alpha=0,56$ $\beta=0,08$ przedstawia Wykres 9. Widoczne jest na nim, że w przypadku prognozy na 1 miesiąc lepszy był w rzeczywistości model z parametrami $\alpha=0,56$ $\beta=0,08$, dopiero dla kolejnego okresu błąd prognozy był większy niż dla modelu z parametrami $\alpha=0,5$ $\beta=0,3$.

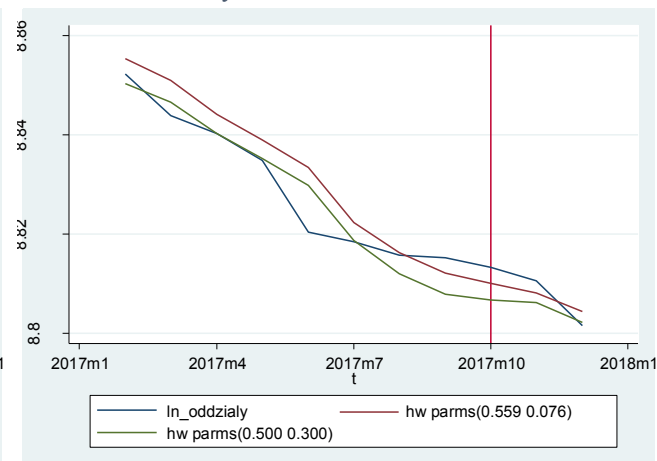
Tabela 11 Błędy prognozy dla zmiennej (*ln_oddzialy*) w modelach liniowych Holta (2017m11-2017m12)

	$\alpha=0,5$ $\beta=0,5$	$\alpha=0,3$ $\beta=0,5$	$\alpha=0,3$ $\beta=0,3$	$\alpha=0,5$ $\beta=0,3$	$\alpha=0,56$ $\beta=0,08$
MAE	0,00331	0,00392	0,00583	0,00262	0,00750
MSE	0,00001	0,00002	0,00004	0,00001	0,00013
MAPE	0,00038	0,00044	0,00066	0,00030	0,00084
AMAPE	0,00019	0,00022	0,00033	0,00015	0,00042

Wykres 8 Ekstrapolacja zmiennej (*ln_oddzialy*) w modelach liniowych Holta



Wykres 9 Prognoza wartości zmiennej (*ln_oddzialy*) w modelach liniowych Holta



1.5. Porównanie wyników

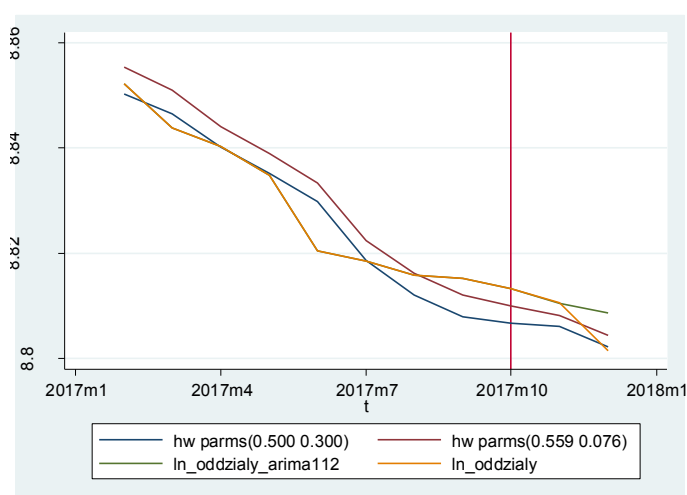
Porównanie wyników uzyskanych dla modeli ARIMA oraz modeli ekstrapolacyjnych dokonano dla modeli, które o najniższych błędach prognozy w okresie 2017m11-2017q12 dla szeregu *ln_oddzialy*. Dla modelu ARIMA był to model z parametrami (1,1,2). Co istotne, model ten wybrano jako najlepszy dopiero na podstawie oceny jakości prognozy. Kryteria informacyjne AIC i BIC wskazywały, że spośród modeli, dla których rząd procesu AR lub MA wynosi 2, lepszy jest model ARIMA (2,1,0). Spośród modeli liniowych Holta, najniższymi błędy prognozy, spośród analizowanych modeli, charakteryzował się model z parametrami $\alpha=0,5$ $\beta=0,3$. Model ten był z kolei gorzej dopasowany do danych na próbie *in-sample*. Finalnie, na podstawie miar jakości prognozy, za najlepszy model należy uznać model liniowy Holta z parametrami $\alpha=0,5$ $\beta=0,3$ (Tabela 12). W przypadku, gdyby w wyborze

modelu kierować się dopasowaniem do danych na próbie *in-sample*, wybrany byłby model liniowy Holta z parametrami $\alpha=0,56$ $\beta=0,08$.

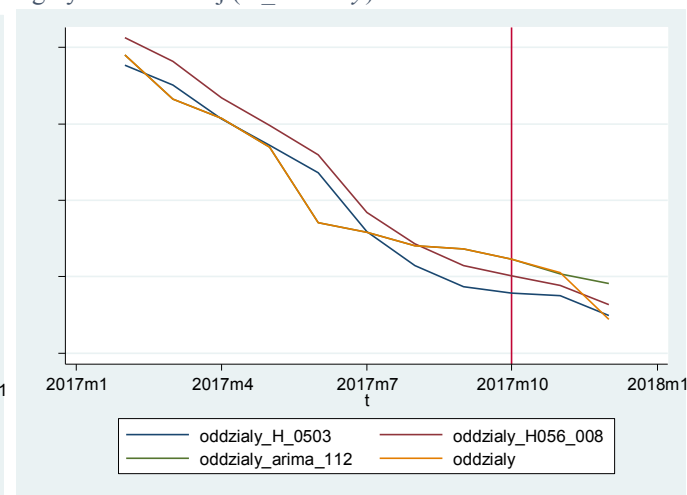
Tabela 12 Błędy prognozy dla zmiennej (*ln_oddzialy*) w modelach liniowych Holta i modelu ARIMA (prognoza na 2 miesiące)

	Model liniowy Holta $\alpha=0,5$ $\beta=0,3$	Model liniowy Holta $\alpha=0,56$ $\beta=0,08$	ARIMA (1,1,2)	ARIMA(2,1,0)
MAE	0,00262	0,00750	0,00365	0,00615
MSE	0,00001	0,00013	0,00002	0,00004
MAPE	0,00030	0,00084	0,00042	1,11143
AMAPE	0,00015	0,00042	0,00021	1,29965

Wykres 10 Porównanie prognozy dla zmiennej (*ln_oddzialy*) w modelach liniowych Holta i modelu ARIMA



Wykres 11 Porównanie prognozy dla zmiennej nieprzekształconej (*oddzialy*) na podstawie prognozy logarytmu zmiennej (*ln_oddzialy*)



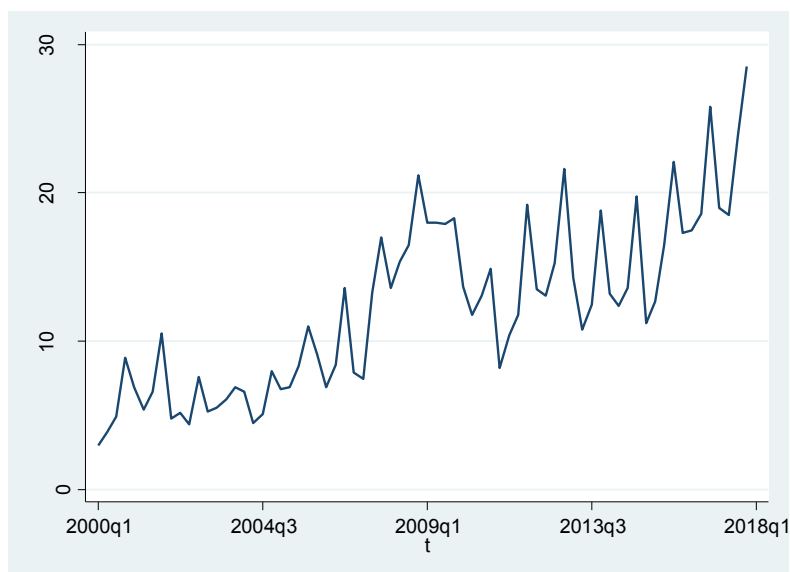
Podsumowaniem analizy jest przedstawienie wyników prognozy z pomięciem przekształcenia logarymicznego tzn. dla rzeczywistej liczby oddziałów banków. Co istotne, od 2016 roku obserwowany jest systematyczny (prawie liniowy) spadek liczby oddziałów banków. Uzyskanie prognozy wskazującej poprawnie tylko na kierunek zmiany (tj. zmniejszenie liczby oddziałów), ale obciążonej dużym błędem, nie jest zatem zadawalające. Prognoza na pierwszy z analizowanych miesięcy tj. listopad 2017 jest zdecydowanie lepsza w przypadku modelu ARIMA – prognozowane było funkcjonowanie 6704 oddziałów względem wartości rzeczywistej 6705 (model prognozował spadek liczby oddziałów o 20, faktycznie liczbę oddziałów zmniejszono o 19). Prognoza na kolejny miesiąc tj. grudzień 2017, była lepsza w modelu liniowym Holta (błąd prognozy o 5 oddziałów). Różnice pomiędzy wartościami prognozowanymi i zrealizowanymi są zatem niewielkie.

2. Szereg sezonowy

2.1. Opis szeregu

Wybrany szereg sezonowy to liczba mieszkań oddanych do użytkowania w budownictwie przeznaczonym na sprzedaż lub wynajem w Polsce (w tysiącach, stan w końcu okresu). Szereg uwzględnia dane kwartalne od 1 kwartału 2000 r. do 4 kwartału 2017 r. (72 obserwacje). Dane pobrano z Banku Danych Makroekonomicznych GUS³. Szereg nieprzekształcony występuje dalej pod nazwą: *mieszkania*.

Wykres 12 Liczba mieszkań na sprzedaż lub wynajem oddanych do użytku (w tys.)



2.2. Dekompozycja szeregu

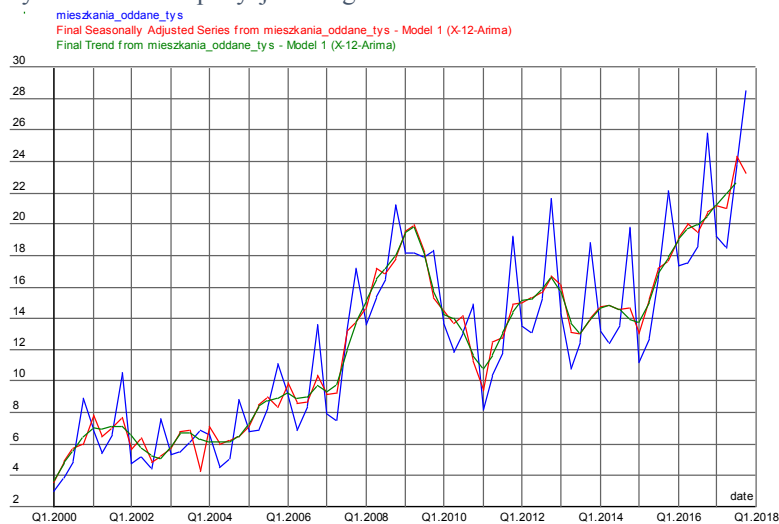
Na podstawie analizy wykresu szeregu (Wykres 12) stwierdzić można, że szereg ma charakter sezonowy – liczba mieszkań oddanych do użytku rośnie w 4 kwartale każdego roku, najniższa liczba obserwowana jest zazwyczaj w kwartale drugim. Różnice te wynikają prawdopodobnie z sezonowości prac budowlanych. Realizowane są one przede wszystkim w miesiącach letnich, przez co w miesiącach zimowych możliwe jest finalizowanie prac wewnątrz budynków i oddawanie mieszkań do użytku. Sezonowość ma charakter multiplikatywny – amplituda wahań dla lat 2000-2004 była znacznie niższa niż amplituda dla lat 2013-2018, przy czym nie jest obserwowany wyraźny, stały wzrost wahań w czasie. Ponadto widoczna jest wyraźna tendencja rozwojowa – liczba mieszkań oddanych do użytku rośnie w kolejnych latach.

Wyniki dekompozycji szeregu z wykorzystaniem procedury X-12-ARIMA w programie Demetra potwierdzają powyższe wnioski. W szeregu wyrównanym sezonowo ograniczone zostały w dużej mierze wahania wartości pomiędzy kolejnymi kwartałami. Wykres trendu nie różni się

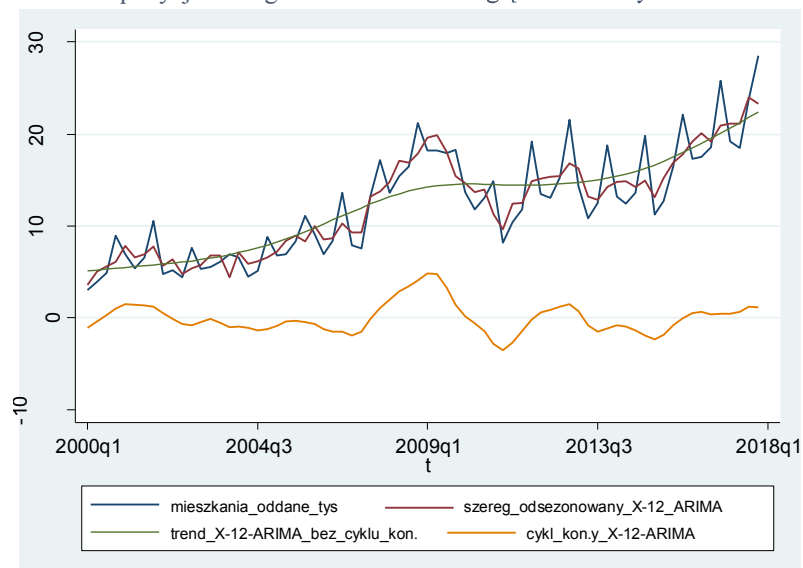
³ <https://bdm.stat.gov.pl/>

natomiast znacząco od szeregu odsezonowanego. Przyjąć można, iż szereg charakteryzuje się trendem rosnącym – niemniej w latach 2008-2009 wystąpiły zaburzenia, związane z cyklem koniunkturalnym. Dla porównania na Wykresie 14 przedstawiono wyniki dekompozycji z uwzględnieniem składnika cyklu koniunkturalnego, zgodnie z wyliczeniami w procedurze X-12-ARIMA (choć uwzględniony szereg czasowy może być uznany za zbyt krótki do zbadania wahań cyklicznych, to jednak otrzymane w procedurze wyniki umożliwiły analizę postaci trendu). Wyłączenie składnika związanego z cyklem, jednoznacznie wskazuje na występowanie addytywnego, deterministycznego trendu rosnącego.

Wykres 13 Dekompozycja szeregu *mieszkania*



Wykres 14 Dekompozycja szeregu *mieszkania* z uwzględnieniem cyklu koniunkturalnego



2.3. Model SARIMA

2.3.1. Stacjonarność szeregu

Przed przystąpieniem do wyboru modelu z klasy SARIMA zweryfikowano czy badany szereg *mieszkania* jest szeregiem stacjonarnym.

Wyniki testu Breucha-Godfrey (B-G) dla reszt w równaniu testu Dickey-Fullera (DF) wskazują na występowanie autokorelacji reszt. Wartości p-value dla opóźnień powyżej pierwszego w teście B-G wynoszą poniżej 0,05, należy odrzucić hipotezę zerową testu B-G o braku autokorelacji reszt i zastosować rozszerzony test Dickey-Fullera (ADF). Wyniki testu B-G dla reszt w równaniu testu ADF wskazują na brak występowania problemu autokorelacji dopiero po uwzględnieniu 7 rozszerzeń w teście ADF. Wartości p-value dla opóźnień od 1 do 7 wynoszą powyżej 0,05, w związku z czym brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji reszt i możliwa jest interpretacja wyników testu ADF z 7 rozszerzeniami.

Tabela 13 Wyniki testu Breusch-Godfrey dla reszt w równaniu testu DF i ADF dla zmiennej (*mieszkania*)

Opóźnienie	Test DF		Test ADF z 6 rozszerzeniami		Test ADF z 7 rozszerzeniami	
	Statystyka testu B-G	p-value	Statystyka testu B-G	p-value	Statystyka testu B-G	p-value
1	1,806	0,1790	9,404	0,0022	1.348	0,2455
2	13,532	0,0012	10,555	0,0051	2.443	0,2947
3	29,842	0,0000	13,024	0,0045	2.944	0,4004
4	48,009	0,0000	13,115	0,0107	3.567	0,4678
5	48,021	0,0000	14,013	0,0155	4.303	0,5066
6	48,268	0,0000	14,625	0,0234	4.486	0,6116
7	50,633	0,0000	15,610	0,0289	5.133	0,6437

Wartość statystyki testowej testu ADF z 7 rozszerzeniami (-0,032) dla zmiennej *mieszkania* jest większa niż wartość krytycznej na poziomie istotności 0,05 (-2,919), brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu ADF mówiącej o niestacjonarności analizowanego szeregu. Szereg *mieszkania* jest niestacjonarny.

Tabela 14 Wyniki testu ADF z 1 rozszerzeniem dla zmiennej *mieszkania*

Wartość statystyki testowej	Wartość krytyczna testu, na poziomie istotności:		
	1%	5%	10%
- 0,032	-3,560	-2,919	-2,594

Test DF i ADF powtórzono dla zmiennej jednokrotnie zróżnicowanej ($d_mieszkania$). Wyniki testu B-G dla reszt w równaniu testu DF ponownie wskazały na występowanie autokorelacji reszt (wartości p-value dla opóźnień 1-6 poniżej 0,05). Problem autokorelacji nie występuje dopiero po uwzględnieniu 6 rozszerzeń testu ADF (wartości p-value dla opóźnień 1-6 powyżej 0,05, brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu B-G).

Tabela 15 Wyniki testu Breusch-Godfrey dla reszt w teście DF i ADF zmiennej zróżnicowanej ($d_mieszkania$)

Opóźnienie	Test DF		Test ADF z 5 rozszerzeniami		Test ADF z 6 rozszerzeniami	
	Statystyka testu B-G	p-value	Statystyka testu B-G	p-value	Statystyka testu B-G	p-value
1	13,260	0,0003	9,072	0,0026	2,247	0,1339
2	28,017	0,0000	10,422	0,0055	2,843	0,2425
3	28,165	0,0000	10,710	0,0134	2,913	0,4052
4	46,740	0,0000	11,162	0,0248	2,978	0,4615
5	47,220	0,0000	11,267	0,0463	4,209	0,5197
6	47,663	0,0000	11,455	0,0753	4,210	0,6483

Wartość statystyki testowej testu ADF z 6 rozszerzeniami (-3,78) dla zmiennej $d_mieszkania$ jest mniejsza niż wartość krytyczna (-1,95). Na poziomie istotności równym 0,05, należy zatem odrzucić hipotezę zerową testu ADF mówiącą o niestacjonarności analizowanego szeregu. Szereg $d_mieszkania$ jest stacjonarny, a szereg $mieszkania$ jest zintegrowany w stopniu pierwszy.

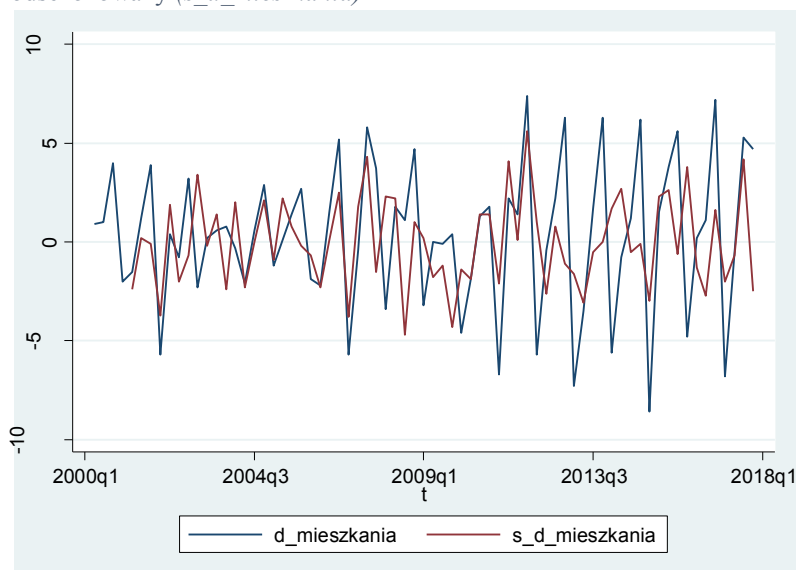
Tabela 16 Wyniki testu ADF z 1 rozszerzeniem dla zmiennej zróżnicowanej ($d_mieszkania$)

Wartość statystyki testowej	Wartość krytyczna testu, na poziomie istotności:		
	1%	5%	10%
-3,780	-2,614	-1,950	-1,610

2.3.2. Identyfikacja i weryfikacja

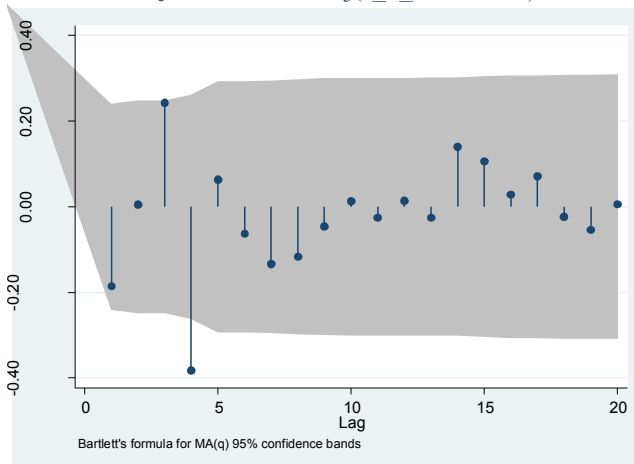
W ramach identyfikacji modelu SARIMA konieczne jest określenie rzędu procesu AR (p), procesu MA (q), procesu sezonowego AR (P) i procesu sezonowego MA (Q). Parametr d równy jest 1 (szereg zintegrowany w stopniu pierwszym), operator sezonowy s równy jest 4 (dane kwartalne), rząd sezonowego różnicowania D określono jako 1. Zgodnie z Wykresem 12 jednokrotne różnicowanie wyeliminowało sezonowość (zmienna $s_d_mieszkania$ – zmienna zróżnicowana i odsezonowana).

Wykres 15 Liczba mieszkań – szereg zróżnicowany ($d_mieszkania$) oraz zróżnicowany i odsezonowany ($s_d_mieszkania$)

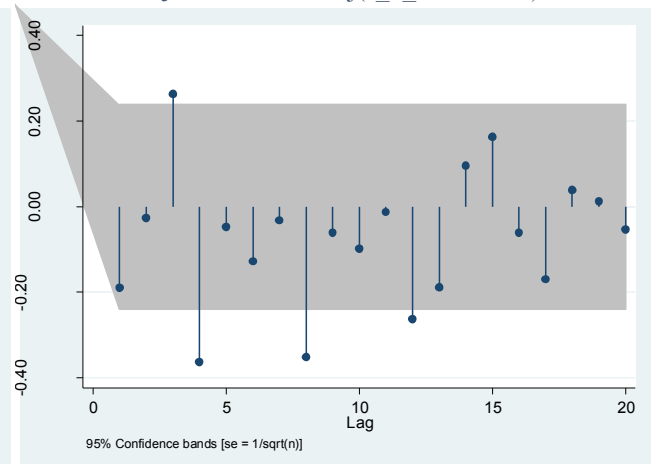


Analiza wykresów funkcji ACF i PACF (Wykresy 16-17) dla zmiennej $s_d_mieszkania$ nie pozwala jednoznacznie stwierdzić, jakie rzędy procesów AR i MA należy uwzględnić - potencjalnie dla procesu AR mogłoby być to 3 opóźnienie, bez opóźnień 1 i 2, dla procesu MA nie jest istotne żadne opóźnienie ($q=0$). Dla procesu sezonowego MA funkcja ACF wskazuje na 1 istotne opóźnienie, dla procesu sezonowego AR istotne są 3 pierwsze opóźnienia, później funkcja wygasa do 0 (rozważyć należy zatem w szczególności $P=0$ i $Q=1$)

Wykres 16 Funkcja ACF dla zmiennej zróżnicowanej i odsezonowanej ($s_d_mieszkania$)



Wykres 17 Funkcja PACF dla zmiennej zróżnicowanej i odsezonowanej ($s_d_mieszkania$)



W celu wyboru optymalnego modelu SARIMA przetestowano różne warianty modelu uwzględniające rząd procesów p, q, P, Q od 0 do 3. Modele oszacowano na szeregu 2000q1-20016q4 (próba *in-sample*), dane z roku 2017 wykorzystane zostaną do prognozowania (*out-of-sample*). W wyniku eliminacji opóźnień nieistotnych statystycznie każda postać ostatecznie sprowadzała się do jednego z następujących wariantów modelu - SARIMA(0,1,0) \times (1,1,0)₄, SARIMA(0,1,0) \times (0,1,1)₄, SARIMA (0,1,0) \times (2,1,0)₄. Zgodnie z wnioskami z analizy wykresów ACF i PACF, w każdym modelu rzędy procesów AR i MA są równe 0.

Tabela 17 Wyniki estymacji modeli SARIMA dla zmiennej $s_d_mieszkania$

	SARIMA(0,1,0) \times (1,1,0) ₄		SARIMA(0,1,0) \times (0,1,1) ₄		SARIMA (0,1,0) \times (2,1,0) ₄	
	Z	p-value	Z	p-value	Z	p-value
Stała	0,09	0,928	0,16	0,870	0,14	0,888
ARMA	-	-	-	-	-	-
ARMA4 AR L1	-2,92	0,004	-	-	-3,28	0,001
AR L2	-	-	-	-	-2,69	0,007
MA L1	-	-	-5,74	0,000	-	-
Logarytm funkcji wiarygodności	-135,694		-130,3741		-131,9227	

Dla wszystkich trzech wybranych wariantów modelu SARIMA, wyniki testu Ljunga-Boxa potwierdziły, że reszty w modelu są białym szumem (wartość p-value dla statystyki testowej Q powyżej 0,05 – brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, zgodnie z którą reszty są białym szumem). Nie jest konieczne wprowadzanie dodatkowych opóźnień do wskazanych modeli.

Tabela 18 Wyniki testy Ljunga-Boxa dla reszt z modeli SARIMA dla zmiennej *s_d mieszkania*

	SARIMA(0,1,0) × (1,1,0) ₄	SARIMA(0,1,0) × (0,1,1) ₄	SARIMA (0,1,0) × (2,1,0) ₄
Wartość statystyki testowej Q	22,1568	31,8623	26,7997
P-value	0,8780	0,4234	0,6822

Wartości kryteriów informacyjnych AIC i BIC wskazują, że za najlepszy model należy uznać model SARIMA (0,1,0) × (0,1,1)₄ – wartości obydwu kryteriów są dla niego najniższe.

Tabela 19 Kryteria informacyjne dla modeli SARIMA dla zmiennej *s_d mieszkania*

	AIC	BIC
SARIMA (0,1,0) × (1,1,0) ₄	277,3880	283,8174
SARIMA (0,1,0) × (0,1,1) ₄	266,7483	273,1777
SARIMA (0,1,0) × (2,1,0) ₄	271,8454	280,4180

2.3.3. Prognozowanie

Wartości prognozowane wyznaczono w pierwszej kolejności dla szeregu uwzględnionego w modelu SARIMA tj. *s_d mieszkania*. Prognozy dokonano na pełnym cyklu sezonowym tj. 4 kwartałach z roku 2017. Do prognozowania wykorzystano wszystkie trzy rozważane wersje modelu. Wyniki przedstawiono na Wykresie 18 oraz w Tabeli 20. Najniższe błędy prognozy, niezależnie od rozważanej miary (MAE, MSE, MAPE, AMAPE), uzyskano dla modelu SARIMA(0,1,0) × (0,1,1)₄, a zatem modelu uznanego za najlepszy na podstawie kryteriów informacyjnych.

Wykres 18 Prognoza wartości zmiennej zróżnicowanej i odsezonowanej (*s_d mieszkania*) w modelach SARIMA

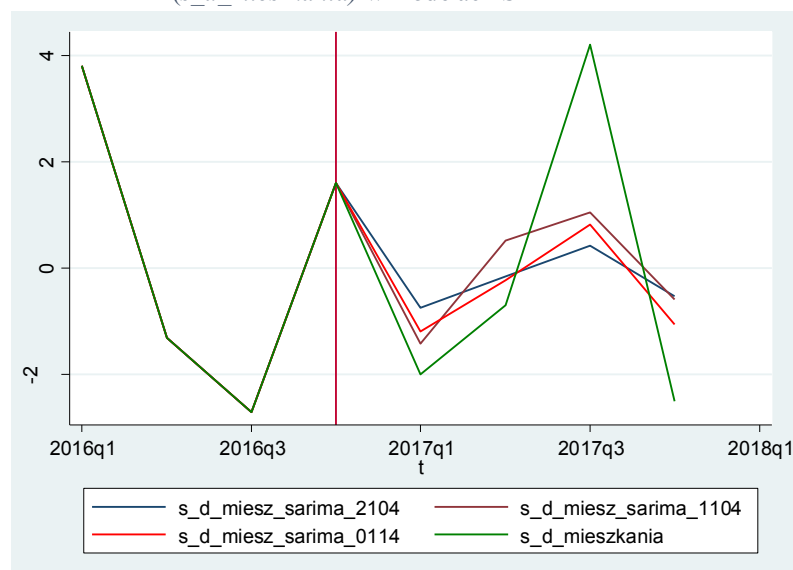


Tabela 20 Błędy prognozy dla zmiennej zróżnicowanej o odsezonowanej ($s_d_mieszkania$) w modelach SARIMA

	SARIMA(0,1,0) × (1,1,0) ₄	SARIMA(0,1,0) × (0,1,1) ₄	SARIMA (0,1,0) × (2,1,0) ₄
MAE	1,7182	1,5275	1,8922
MSE	3,8611	3,5937	5,0180
MAPE	0,8871	0,6183	0,7780
AMAPE	2,0057	0,4638	0,6466

W następnym kroku, wyznaczono wartości prognozowane dla zmiennej nieprzekształconej *mieszkania* tj. bez różnicowania i różnicowania sezonowego (prognozy wyznaczono bezpośrednio na podstawie prognozy $s_d_mieszkania$ i odwrotnych przekształceń). Wyniki przedstawiono na Wykresie 19 oraz w Tabeli 21. W tym przypadku miary błędów prognozy wskazują, że lepszy jest model SARIMA(0,1,0) × (1,1,0)₄, a zatem model który był najgorzej dopasowany do danych wg kryteriów AIC i BIC.

Wykres 19 Prognoza wartości zmiennej nieprzekształconej *mieszkania* w modelach SARIMA

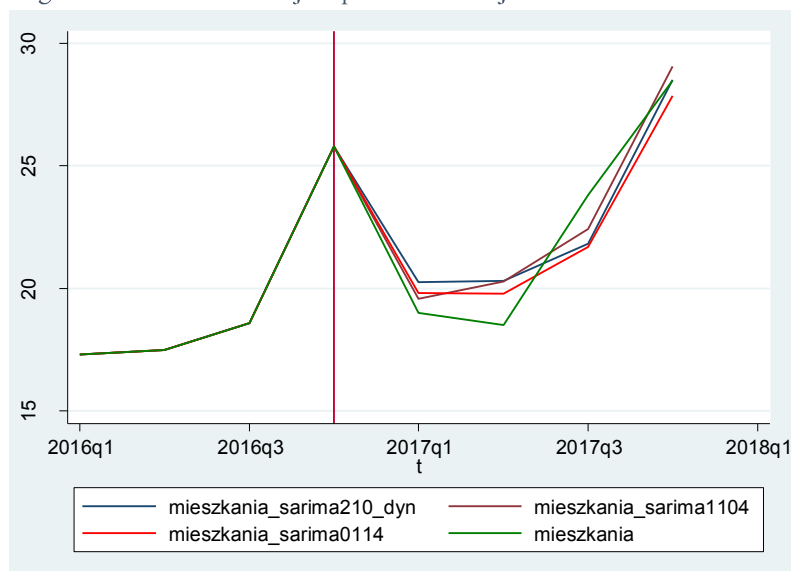


Tabela 21 Błędy prognozy dla zmiennej nieprzekształconej *mieszkania* na podstawie modeli modelach SARIMA

	SARIMA(0,1,0) × (1,1,0) ₄	SARIMA(0,1,0) × (0,1,1) ₄	SARIMA (0,1,0) × (2,1,0) ₄
MAE	1,0761	1,2081	1,2631
MSE	1,4338	1,7733	2,1835
MAPE	0,0512	0,0557	0,0618
AMAPE	0,0252	0,0279	0,0305

2.4. Model ekstrapolacyjny

Dla porównaniu wyników uzyskanych w modelu SARIMA, dla szeregu *mieszkania* dopasowano model ekstrapolacyjny z klasy modeli sezonowych Wintersa. W celu zachowania spójności z modelami SARIMA, oszacowań modeli dokonano na szeregu danych 2000q1-2016q4 (*in-sample*), dane z okresu 2017q1-2017q4 wykorzystano do prognozy (*out-of-sample*). Rozważono 6 wariantów modeli: 3 addytywne oraz 3 multiplikatywne. Dla każdego typu modelu (addytywnego lub multiplikatywnego) zastosowano parametry $\alpha=\beta=\gamma=0,5$, $\alpha=\beta=\gamma=0,3$ oraz parametry wygenerowane iteracyjnie. Parametry wygenerowane automatycznie wyniosły dla modelu addytywnego $\alpha=0,7236$; $\beta=0,0000$ $\gamma=0,8248$, dla modelu multiplikatywnego $\alpha=0,8271$; $\beta=0,0000$ $\gamma=0,4208$.

Zgodnie z oczekiwaniami modele z iteracyjnie ustalonymi parametrami charakteryzują się najlepszym dopasowaniem do danych (Tabela 22). Biorąc pod uwagę, błąd średniokwadratowy (MSE) model addytywny okazał się być gorszy niż multiplikatywny. Wykorzystując jednak zestaw pozostałych miar, stosowanych do późniejszej oceny jakości prognoz (MAE, MAPE, AMAPE) stwierdzić można, że model addytywny jest lepiej dopasowany do danych (niższa wartość wskazanych miar).

Tabela 22 Błędy dopasowania dla zmiennej (*mieszkania*) w modelach addytywnych i multiplikatywnych Wintersa (2000q1-2016q12)

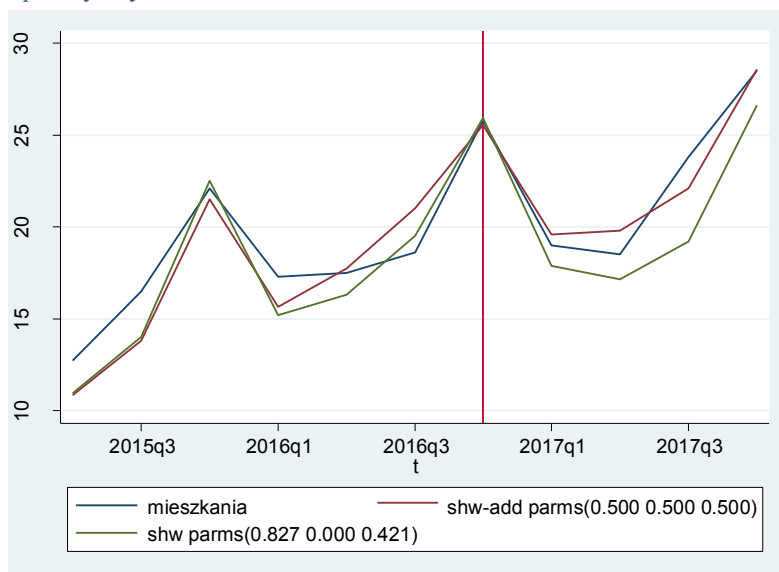
	Modele multiplikatywne			Modele addytywne		
	$\alpha=\beta=\gamma=0,5$	$\alpha=\beta=\gamma=0,3$	$\alpha=0,82$; $\beta=0,00$ $\gamma=0,42$	$\alpha=\beta=\gamma=0,5$	$\alpha=\beta=\gamma=0,3$	$\alpha=0,72$; $\beta=0,00$ $\gamma=0,82$
MAE	1,7721	1,8315	1,3698	1,5713	1,7664	1,4117
MSE	5,1508	6,0557	3,5430	3,9424	5,1565	3,1859
MAPE	0,1698	0,1704	0,1349	0,1618	0,1711	0,1432
AMAPE	0,0835	0,0837	0,0655	0,0802	0,0836	0,0701

Porównanie wyników prognoz wyznaczonych dla danych z okresu 2017q1-2017q4 wskazuje natomiast, że lepszymi modelami do prognozowania są modele addytywne z odgórnie nałożonymi parametrami. W szczególności najlepszym okazał się model addytywny z parametrami $\alpha=\beta=\gamma=0,5$, dla którego uzyskano niższe wartości dla 3 z 4 analizowanych miar. Modele z parametrami wyznaczonymi iteracyjnie były dobrze dopasowane do danych w próbie *in-sample*, gorzej sprawdzają się w przypadku prognozowania (każdorazowo prognozowana była zbyt niska liczba mieszkań).

Tabela 23 Błędy prognozy dla zmiennej (*mieszkania*) w modelach addytywnych i multiplikatywnych Wintersa (2017q1-2017q12)

	Modele multiplikatywne			Modele addytywne		
	$\alpha=\beta=\gamma=0,5$	$\alpha=\beta=\gamma=0,5$	$\alpha=0,82$; $\beta=0,00$ $\gamma=0,42$	$\alpha=\beta=\gamma=0,5$	$\alpha=\beta=\gamma=0,3$	$\alpha=0,72$; $\beta=0,00$ $\gamma=0,82$
MAE	1,4587	1,1490	2,2461	0,9111	0,9298	1,5942
MSE	3,8799	2,1322	6,9905	1,2263	1,1598	4,5224
MAPE	0,0647	0,0462	0,0981	0,0436	0,0453	0,0640
AMAPE	0,0342	0,0233	0,0525	0,0218	0,0223	0,0339

Wykres 20 Prognoza wartości zmiennej (*mieszkania*) w modelu addytywnym i multiplikatywnym Wintersa



2.5. Porównanie wyników

Finalne porównanie wyników uzyskanych dla modeli SARIMA oraz modeli ekstrapolacyjnych dokonano dla modeli, które okazały się charakteryzować najniższymi błędami prognoz w okresie 2017q1-2017q4 dla szeregu nieprzekształconego (*mieszkania*). Co istotne w przypadku modelu SARIMA, był to model inny niż model dla którego uzyskano najniższe błędy prognozy dla szeregu przekształconego, który podlegał modelowaniu (szeregu zróżnicowany i odsezonowany). Nie były to również modele najlepiej dopasowane do danych na próbie do ich estymacji. Tym samym porównano addytywny model Wintersa (parametry $\alpha=\beta=\gamma=0,5$) oraz SARIMA $(0,1,0)\times(1,1,0)_4$. Niezależnie od rozważanej miary jakości prognoz najlepszym modelem do prognozowania okazał się być model addytywny model Wintersa.

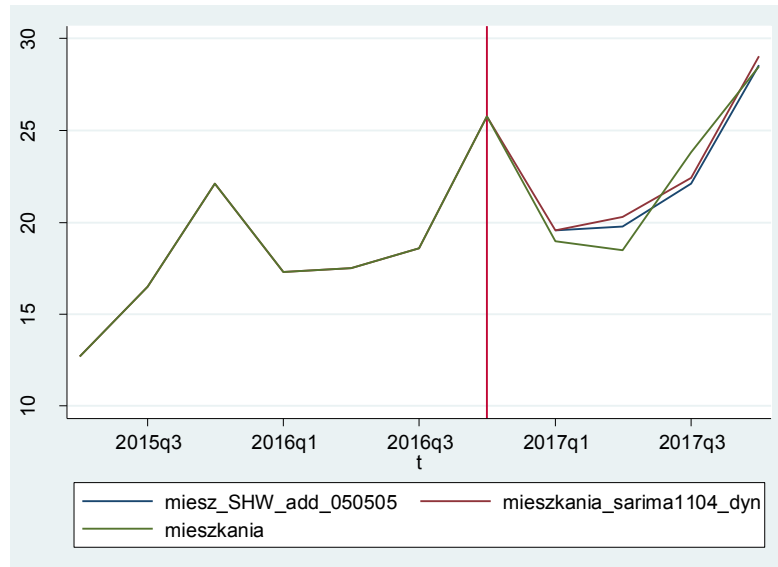
Tabela 24 Błędy prognozy dla zmiennej (*mieszkania*) w modelach addytywnych i multiplikatywnych Wintersa oraz modelu SARIMA (2017q1-2017q4)

	Addytywny model Wintersa ($\alpha=\beta=\gamma=0,5$)	Model SARIMA $(0,1,0)\times(1,1,0)_4$
MAE	0,9111	1,0761
MSE	1,2263	1,4338
MAPE	0,0436	0,0512
AMAPE	0,0218	0,0252

Prognozy uzyskane z obydwu modeli są jednak w dużej mierze zbliżone do siebie – przeszacowują liczbę mieszkań oddanych do użytku w 2017q1 i 2017q2 o ok. 1 tys., a liczba mieszkań oddanych do użytku w 2017q3 jest niedoszacowana (Wykres 21). Dla 2017q4 występują niewielkie

błędy prognozy, w szczególności dla modelu addytywnego różnica pomiędzy wartością prognozowaną i rzeczywistą (28,5 tys.) wyniosła poniżej 100 mieszkań.

Wykres 21 Prognoza wartości zmiennej (*mieszkania*) w modelach addytywnym i multiplikatywnym Wintersa oraz modelu SARIMA



Podsumowanie

W pracy przedstawiono wyniki analizy szeregów czasowych – sezonowego dotyczącego liczby mieszkań oddanych do użytku w Polsce oraz niesezonego dotyczącego liczby banków funkcjonujących w Polsce. Szereg dostępnych danych dla szeregu sezonowego obejmował lata 2000-2017, przy czym okres prognozy wynosił 4 kwartały roku 2017. szereg niesezonego obejmował lata 2010-2017, z czego okres prognozy wynosił 2 ostatnie miesiące roku 2017 (listopad-grudzień).

Wyniki przeprowadzonych analiz, jednoznacznie wskazały, iż najniższe błędy prognozy uzyskano w modelach ekstrapolacyjnych z odgórnie narzuconymi parametrami, a zatem modelach najbardziej uniwersalnych. Dla szeregu sezonowego finalnie najlepszym okazał się być addytywny model Wintersa, dla szeregu niesezonego model liniowy Holta. Gorszą jakością prognoz charakteryzowały się z kolei modele lepiej dopasowane do danych w próbie na której były oszacowane, w tym modele ekstrapolacyjne z parametrami dobranymi w sposób iteracyjny, jak i modele z klasy ARIMA/SARIMA.