Modele zapisane w przestrzeni stanów

- Modele Przestrzeni Stanów (*State Space Models*) są to modele, w których część parametrów jest nieobserwowalna i losowa.

- Zachowanie wielowymiarowej zmiennej $\boldsymbol{y}_t$ zależy więc od
  - parametrów deterministycznych
  - wektora zmiennych egzogenicznych $\boldsymbol{X}_t$
  - nieobserwowalnego stanu danego wektorem $\boldsymbol{z}_t$.

- Równanie pomiarowe (*measurement equation*)

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{H}_t\, \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_t$$

gdzie $\boldsymbol{z}_t$ nazywamy wektorem stanu (*state vector*)

- Równanie przejścia (*transition equation*)

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{B}_t \boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{F}_t \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t$$

- Razem oba te równania nazywamy liniowym systemem przestrzeni stanów (*linear state space system*) gdzie

- $\boldsymbol{y}_t$ jest $(G \times 1)$ wymiarowym obserwowalnym wektorem zmiennych endogenicznych

- $\boldsymbol{z}_t$ jest $(S \times 1)$ wymiarowym wektorem stanów natury

- $\boldsymbol{x}_t$ jest $(K \times 1)$ wymiarowym obserwowalnym wektorem zmiennych wejściowych

- $\boldsymbol{v}_t$ jest $(G \times 1)$ wymiarowym błędów pomiaru

- $\boldsymbol{w}_t$ jest $(S \times 1)$ wymiarowym błędów losowych w równiach przejścia
- $\boldsymbol{H}_t$ jest $(G \times S)$ wymiarową macierzą pomiarową
- $\boldsymbol{G}_t$ jest $(G \times K)$ wymiarową macierzą wejścia w równaniach pomiaru
- $\boldsymbol{B}_t$ jest $(S \times S)$ wymiarową macierzą przejścia
- $\boldsymbol{F}_t$ jest $(S \times K)$ wymiarową macierzą wejścia w równaniach przejścia
- O macierzach $\boldsymbol{H}_t, \boldsymbol{G}_t, \boldsymbol{B}_t, \boldsymbol{F}_t$ zakładamy, że są niezależne od $\boldsymbol{v}_t$.
- Zakładamy też, że proces zaczyna się od pewnego stanu początkowego $\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{x}_0$.
- Zaburzenia losowe $\boldsymbol{w}_t$, $\boldsymbol{v}_t$ są niezależne i mają stałe w czasie wariancje

- łączny proces generujący zaburzenia losowe jest niekorelowany w czasie, ma rozkład

$$\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{w}_t \\ \boldsymbol{v}_t \end{array}\right] \sim N\left(0, \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{\Sigma}_w & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_v \end{array}\right]\right) \text{ dla } t = 0, \ldots$$

  i jest niezależny od $\boldsymbol{z}_0$, który ma rozkład:

$$\boldsymbol{z}_0 \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0\right)$$

- Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_s &= (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s) \\
\boldsymbol{z}_{t|s} &= \mathrm{E}\left(\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{Y}_s\right) \\
\boldsymbol{\Sigma}_z(t|s) &= \mathrm{Var}\left(\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{Y}_s\right) \\
\boldsymbol{y}_{t|s} &= \mathrm{E}\left(\boldsymbol{y}_t | \boldsymbol{Y}_s\right) \\
\boldsymbol{\Sigma}_y(t|s) &= \mathrm{Var}\left(\boldsymbol{y}_t | \boldsymbol{Y}_s\right) \\
\boldsymbol{\Sigma}_{zy}(t|s) &= \mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{z}_t, \boldsymbol{y}_t | \boldsymbol{Y}_s\right)
\end{aligned}
$$

- $(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ oznacza, że warunkowy rozkład $\boldsymbol{z}$ przy danym $\boldsymbol{y}$ jest wielowymiarowym rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej $\boldsymbol{\mu}$ i macierzy wariancji kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$.

- Przy tych założeniach warunkowe rozkłady $\boldsymbol{z}_t$ i $\boldsymbol{y}_t$ będą rozkładami normalnymi o następujących parametrach

$$\left(\boldsymbol{z}_t \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1}\right) \sim N\left(\boldsymbol{z}_{t|t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t \middle| t-1\right)\right) \text{ dla } t = 2, \ldots, T$$

$$\left(\boldsymbol{z}_t \middle| \boldsymbol{Y}_{t}\right) \sim N\left(\boldsymbol{z}_{t|t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t \middle| t\right)\right) \text{ dla } t = 1, \ldots, T$$

$$\left(\boldsymbol{y}_t \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1}\right) \sim N\left(\boldsymbol{y}_{t|t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_y\left(t \middle| t-1\right)\right) \text{ dla } t = 2, \ldots, T$$

$$\left(\boldsymbol{z}_t \middle| \boldsymbol{Y}_{T}\right) \sim N\left(\boldsymbol{z}_{t|T}, \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t \middle| T\right)\right) \text{ dla } t > T$$

$$\left(\boldsymbol{y}_t \middle| \boldsymbol{Y}_{T}\right) \sim N\left(\boldsymbol{y}_{t|T}, \boldsymbol{\Sigma}_y\left(t \middle| T\right)\right) \text{ dla } t > T$$

Przykład

- Proces $MA\,(2)$

$$y_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$$

  – równanie pomiarowe

$$y_t = \boldsymbol{H} \boldsymbol{z}_t$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{z}_t' &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t & \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  – równanie przejścia

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{B} \boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Sigma}_w = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Filtry Kalmana

- Przy tych założeniach można dowieść następujących zależności nazywanych rekursjami filtrów Kalmana (*Kalman filter recursions*)

Inicjacja: ($t = 0$)

$$\boldsymbol{z}_{0|0} = \boldsymbol{\mu}_0$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_z (0|\, 0) = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

Predykcja: $(1 \leq t \leq T)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_{t|t-1} &= \boldsymbol{B}_t \boldsymbol{z}_{t-1|t-1} + \boldsymbol{F}_t \boldsymbol{x}_{t-1} \\
\boldsymbol{\Sigma}_z \left(t|\, t-1\right) &= \boldsymbol{B}_t \boldsymbol{\Sigma}_z \left(t-1|\, t-1\right) \boldsymbol{B}_t' + \boldsymbol{\Sigma}_w \\
\boldsymbol{y}_{t|t-1} &= \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{z}_{t|t-1} + \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{x}_t \\
\boldsymbol{\Sigma}_y \left(t|\, t-1\right) &= \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{\Sigma}_z \left(t|\, t-1\right) \boldsymbol{H}_t' + \boldsymbol{\Sigma}_v
\end{aligned}$$

Korekta: $(1 \leq t \leq T)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_{t|t} &= \boldsymbol{z}_{t|t-1} + \boldsymbol{P}_t \left(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{y}_{t|t-1}\right) \\
\boldsymbol{\Sigma}_z \left(t|\, t\right) &= \boldsymbol{\Sigma}_z \left(t|\, t-1\right) - \boldsymbol{P}_t \boldsymbol{\Sigma}_y \left(t|\, t-1\right) \boldsymbol{P}_t'
\end{aligned}$$

gdzie

$$\boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t|\, t-1\right) \boldsymbol{H}_t' \boldsymbol{\Sigma}_y\left(t|\, t-1\right)^{-1} \qquad \text{((zysk z filtru Kalmana))}$$

- W przypadku, kiedy nie istnieje odwrotność macierzy $\boldsymbol{\Sigma}_y\left(t|\, t-1\right)$ możemy zastosować uogólnioną odwrotność macierzy.

- Rekursje przeprowadzamy zaczynając od predykacji dla $t = 1$.

- Potem przeprowadzamy korektę dla $t = 1$.

- Później odpowiednio predykcję i korektę przeprowadzamy dla $t = 2$, $t = 3$ itd.

Prognozowanie: ($t > T$)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_{t|T} &= \boldsymbol{B}_t \boldsymbol{z}_{t-1|T} + \boldsymbol{F}_t \boldsymbol{x}_{t-1} \\
\boldsymbol{\Sigma}_z \left(t|\, T\right) &= \boldsymbol{B}_t \boldsymbol{\Sigma}_z \left(t-1|\, T\right) \boldsymbol{B}_t' + \boldsymbol{\Sigma}_w \\
\boldsymbol{y}_{t|T} &= \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{z}_{t|T} + \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{x}_t \\
\boldsymbol{\Sigma}_y \left(t|\, T\right) &= \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{\Sigma}_z \left(t|\, T\right) \boldsymbol{H}_t' + \boldsymbol{\Sigma}_v
\end{aligned}
$$

- Prognozowanie wykonujemy rekursywnie dla $t = T + 1, T + 2, \ldots$.
- Niekiedy chcemy oszacować wartości wektora stanu dla znanego $\boldsymbol{Y}_T$.
- Posługujemy się do tego wzorami rekursywnymi nazywanymi wygładzaniem Kalmana.
- Wzory te stosujemy kolejno dla $T - 1, T - 2, \ldots$

Wygładzanie: ($t < T$)

$$\boldsymbol{z}_{t|T} = \boldsymbol{z}_{t|t} + \boldsymbol{S}_t \left(\boldsymbol{z}_{t+1|T} - \boldsymbol{z}_{t+1|t}\right)$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_z\left(t|\,T\right) = \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t|\,t\right) - \boldsymbol{S}_t\left[\boldsymbol{\Sigma}_z\left(t+1|\,t\right) - \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t+1|\,T\right)\right]\boldsymbol{S}_t'$$

gdzie

$$\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t|\,t\right)\boldsymbol{B}_{t+1}'\boldsymbol{\Sigma}_z\left(t+1|\,t\right)^{-1}$$ ((macierz wygładzania Kalmana))

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Inicjacja} & \boxed{\begin{array}{c} z_{0|0} = \boldsymbol{\mu}_0 \\ \Sigma_z\left(t|\, s\right) = \Sigma_0 \end{array}} & & \\
 & \quad\vdots & & \\
 & \quad\downarrow & & \\
 & \boxed{\begin{array}{c} z_{t-1|t-1} \\ \Sigma_z\left(t-1|\, t-1\right) \end{array}} & & \\
 & \quad\downarrow & & \\
\text{Predykcja} & \boxed{\begin{array}{c} z_{t|t-1} \\ \Sigma_z\left(t|\, t-1\right) \end{array}} & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} y_{t|t-1} \\ \Sigma_y\left(t|\, t-1\right) \end{array}} \\
 & \quad\downarrow & \longleftarrow & \\
\text{Korekta} & \boxed{\begin{array}{c} z_{t|t} \\ \Sigma_z\left(t|\, t\right) \end{array}} & & \\
 & \quad\vdots & & \\
t = 1, \ldots, T & \quad\downarrow & & \\
\text{Prognozowanie} & \boxed{\begin{array}{c} z_{t|T} \\ \Sigma_z\left(t|\, T\right) \end{array}} & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} y_{t|T} \\ \Sigma_y\left(t|\, T\right) \end{array}} \\
 & \quad\downarrow & & \\
t = T+1, T+2, \ldots & \quad\vdots & &
\end{array}
$$

Przykład algorytm w zastosowaniach

- Proces $MA(2)$
  - Inicjacja (załóżmy, że $\boldsymbol{\varepsilon}_{0|0}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_{-1|0}$ są niezależne i mają równe wariancje)

$$\boldsymbol{z}_{0|0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{0|0} & \boldsymbol{\varepsilon}_{-1|0} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_z(0|0) = \boldsymbol{\sigma}_{11}(0|0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– Predykcja:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}'_{t|t-1} &= \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1|t-1} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\Sigma}_z(t|\,t-1) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}_{11}(t-1|\,t-1) \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y}_{t|t-1} &= \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1|t-1} \\
\boldsymbol{\Sigma}_y(t|\,t-1) &= \boldsymbol{\sigma}_w^2 + \boldsymbol{\theta}_1^2 \boldsymbol{\sigma}_{11}(t-1|\,t-1)
\end{aligned}$$

– Korekta:

$$\boldsymbol{P}_t = \left[\boldsymbol{\sigma}_w^2 + \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\sigma}_{11}(t-1|\,t-1)\right]^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_w^2 \\ \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\sigma}_{11}(t-1|\,t-1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_{t|t} = \boldsymbol{z}_{t|t-1} + \boldsymbol{P}_t \left(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{y}_{t|t-1}\right)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_z\left(t|\,t\right) = \boldsymbol{\Sigma}_z\left(t|\,t-1\right) - \boldsymbol{P}_t\boldsymbol{\Sigma}_y\left(t|\,t-1\right)\boldsymbol{P}_t'$$

– Prognozowanie $t > T$

$$\boldsymbol{z}'_{t|T} = \left[\begin{array}{cc} 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1|T} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_z\left(t|\,T\right) = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{\sigma}_w^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}_{11}\left(t-1|\,T\right) \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{y}_{t|T} = \boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1|T}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y\left(t|\,T\right) = \boldsymbol{\sigma}_w^2 + \boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\sigma}_{11}\left(t-1|\,T\right)$$

– Wygładzanie $t < T$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_t &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{z}_{t|T} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{t|t} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1|T} - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1|t}\right) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1|t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Estymacja parametrów w Modelach Przestrzeni Stanów

- Jedną z podstawowych zalet modeli przestrzeni stanów jest to, że umożliwiają one stosunkowo łatwą specyfikację całej klasy modeli dla analizy szeregów czasowych.
- Zgromadźmy wszystkie nieznane parametry z macierzy $\boldsymbol{B}_t$, $\boldsymbol{F}_t$, $\boldsymbol{H}_t$, $\boldsymbol{\Sigma}_w$, $\boldsymbol{\Sigma}_v$, $\boldsymbol{\Sigma}_0$ i $\boldsymbol{\mu}_0$ w wektorze parametrów $\boldsymbol{\delta}$.
- Estymacja parametrów modeli przestrzeni stanów polegać będzie na maksymalizacji funkcji wiarygosności względem parametru $\boldsymbol{\delta}$.
- Okazuje się, że postać funkcji wiarygodności można stosunkowo prosto przestawić przy zastosowaniu Filtrów Kalmana.

Funkcja wiarygodności

- Korzystając z twierdzenia Bayesa można przedstawić łączną funkcję wiarygodności dla zależnych zdarzeń $\boldsymbol{Y}_T = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_T)$ w postaci następującego iloczynu

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{Y}_T, \boldsymbol{\theta}) &= L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_T, \boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{\theta})\, f(\boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_T | \, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{\theta}) \\
&= f(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{\theta})\, f(\boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_T | \, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{\theta}) \\
&= f(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{\theta})\, f(\boldsymbol{y}_2 | \, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{\theta})\, f(\boldsymbol{y}_3, \ldots, \boldsymbol{y}_T | \, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{\theta}) \\
&\vdots \\
&= f(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{\theta})\, f(\boldsymbol{y}_2 | \, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{\theta}) \times \ldots \times f(\boldsymbol{y}_T | \, \boldsymbol{Y}_{T-1}, \boldsymbol{\theta}) .
\end{aligned}
$$

- Logarytm funkcji wiarygodności będzie miał więc postać

$$\ell\left(\boldsymbol{Y}_T, \boldsymbol{\theta}\right) = \ln f\left(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{\theta}\right) + \sum_{i=1}^{T} \ln f\left(\boldsymbol{y}_t \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}\right)$$

- Jeśli prawdziwe są założenie konieczne do wyprowadzenia postaci Filtrów Kalmana to zmienna $\left(\boldsymbol{y}_t \middle| \boldsymbol{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}\right)$ będzie miała rozkład normalny a funkcja wiarygodności przyjmie postać

$$\begin{aligned}\ell\left(\boldsymbol{Y}_T, \boldsymbol{\theta}\right) = &-\frac{KT}{2} \ln\left(2\boldsymbol{\pi}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{T} \ln\left|\boldsymbol{\Sigma}_y\left(t \middle| t-1\right)\right| \\ &- \sum_{t=1}^{T} \left(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{y}_{t|t-1}\right)' \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\left(t \middle| t-1\right) \left(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{y}_{t|t-1}\right).\end{aligned}$$

- Wartość warunkowej wariancji $\boldsymbol{\Sigma}_y(t|\,t-1)$ i warunkowej wartości oczekiwanej $\boldsymbol{y}_{t|t-1}$ otrzymujemy rekurencyjnie ze wzorów na Filtry Kalmana.

- Dla uproszczenia notacji onaczmy

$$\boldsymbol{e}_t(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{y}_{t|t-1}$$

i

$$\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}(t|\,t-1)$$

- Przy takim zapisie funkcja wiarygodności przyjmuje postać

$$\ell(\boldsymbol{Y}_T, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{KT}{2}\ln(2\boldsymbol{\pi}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\left[\ln|\boldsymbol{\Sigma}_t(\boldsymbol{\theta})| + \boldsymbol{e}_t'(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{e}_t'\right]$$

- Do szacowanych parametrów modelu należeć mogą dowolne parametry będące cześcią macierzy $\boldsymbol{H}_t, \boldsymbol{G}_t, \boldsymbol{B}_t, \boldsymbol{F}_t$ oraz macierze $\boldsymbol{\Sigma}_w$, $\boldsymbol{\Sigma}_v$ oraz $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0$.

- W wielu zastosowaniach okazuje się, że trzeba na parametry nałożyć dodatkowe ograniczenia celem uzyskania identyfikacji.

Własności estymatorów MNW

- W przypadku filtrów Kalmana nie jest łatwo podać ogólne warunki, dla których estymatory MNW mają standardowe własności.

- Przy spełnionych warunkach z początku tego rozdziału najłatwiej podać takie warunki dla przypadku, gdy macierz $\boldsymbol{G}_t = \boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{B}_t = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{F}$ nie zależą od t. W takim przypadku, jeśli

1. wektor $\boldsymbol{\theta}$ znajduje się we wnętrzu zbioru $\boldsymbol{\Theta}$

2. $\boldsymbol{H}_t = (\boldsymbol{x}_t \otimes \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{J}$, gdzie $\boldsymbol{J}$ jest z góry znaną macierzą lub $\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{H}$ jest nielosową macierzą parametrów

3. $\boldsymbol{x}_t$ jest niestochastyczne i istnieją takie stałe c_1 i c_2, że $c_1 \leq \boldsymbol{x}_t' \boldsymbol{x}_t \leq c_2$ dla $t = 1, 2, \ldots$

4. spełniony jest warunek, że macierz informacyjna jest asymptotycznie nieosobliwa

5. wszystkie wartości własne macierzy $\boldsymbol{B}$ są co do modułu mniejsze od 1

to estymator

$$\sqrt{n}\left(\widetilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{D} N\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{i}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)$$