Uogólniona Metoda Momentów

- Momenty z próby dążą do momentów teoretycznych (Prawo Wielkich Liczb)

$$\operatorname{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \mathrm{E}\left(y\right)$$

- Klasyczna **M**etoda **M**omentów (MM) polega na szacowaniu momentów teoretycznych $\mathrm{E}\left(y\right)$, za pomocą momentów z próby.

Przykład Załóżmy, że próba pochodzi z rozkładu normalnego $N\left(0, \boldsymbol{\sigma}^2\right)$. Jeśli spełnione są założenia prawa wielkich liczb, to

$$\operatorname{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \operatorname{plim} \overline{y} = \mathrm{E}\left(y\right) = \boldsymbol{\mu}$$

$$s_y^2 = \operatorname{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = \mathrm{E}\left[y^2 - \mathrm{E}(y)\right] = \mathrm{Var}(y) = \boldsymbol{\sigma}^2$$

Za estymatory metody momentów $\boldsymbol{\mu}$ można więc przyjąć $\overline{y}$ a $\boldsymbol{\sigma}^2$ można oszacować za pomocą s_y^2.

- Uogólniona Metoda Momentów (GMM - **G**eneralised **M**ethod of **M**oments) rozszerza tą metodę o dwa elementy.

- Wektor momentów teoretycznych jest funkcją nieznanych wektora parametrów $\boldsymbol{\theta}$ taką, że
$$\mathrm{E}\left[\boldsymbol{m}(y_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta})\right] = 0$$

- $\boldsymbol{m}(y_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ będziemy oznaczać jako $\boldsymbol{m}_i(\boldsymbol{\theta})$.

- Jeśli spełnione są założenia prawa wielkich liczb, to

$$\operatorname{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \left(\boldsymbol{\theta} \right) = 0$$

- Estymator GMM rozwiązując następujący układ równań:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} \right) = 0$$

- Bardzo często warunki wynikające z teorii mają postać mometów warunkowych:

$$\mathrm{E} \left[\boldsymbol{f}_i \left(\boldsymbol{\theta} \right) \middle| \boldsymbol{z}_i \right] = 0$$

gdzie $\boldsymbol{z}_i$ może częściowo składać się z elementów wektora zmiennych objaśniających $\boldsymbol{x}_i$

- Liczenie empirycznych momentów warunkowych w przypadku, kiedy $\boldsymbol{z}_i$ jest ciągłe jest sprawą beznadziejną.

- W związku z tym staramy się zastąpić momenty warunkowe momentami bezwarunkowymi.

- Z prawa iterowanych wartości oczekiwanych dla $\boldsymbol{m}_i(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{w}_i' \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\theta})$ i $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}_i)$ wynika, że

$$\mathrm{E}\left[\boldsymbol{m}_i(\boldsymbol{\theta})\right] = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{w}_i' \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\theta})\right] = \mathrm{E}_{z_i}\left[\boldsymbol{w}_i' \mathrm{E}\left(\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\theta}) \middle| \boldsymbol{z}_i\right)\right] = 0$$

- I ograniczenia narzucone na warunkowe wartości oczekiwane możemy zastąpić ograniczeniami narzuconymi na bezwarunkowe wartości oczekiwane

$$\mathrm{E}\left[\boldsymbol{w}_i' \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\theta})\right] = 0.$$

- Elementy wektora $\boldsymbol{w}_i$ nazywamy instrumentami

Przykład Wyprowadzenie estymatora MNK w Uogólnionej Metodzie Momentów

Założenia $KMRL$ można modyfikować w sposób następujący:

1. $y_i = \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i$
2. $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i | \, \boldsymbol{x}_i\right) = 0$
3. $\mathrm{Var}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{I}$

Zauważmy, że założenia o tym, że $\boldsymbol{x}_i$ jest deterministyczne i $\mathrm{E}\left(\varepsilon_i\right) = 0$ zastąpiło założenie, że $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i | \, \boldsymbol{x}_i\right) = 0$. Przyjmijmy za instrumenty w tym modelu elementy $\boldsymbol{x}_i$. Otrzymujemy następujący warunek nałożony na bezwarunkową wartość oczekiwaną:

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\varepsilon}_i\right) = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}_i'\left(y_i - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}\right)\right] = 0$$

Odpowiadający temu warunkowi warunek narzucony na momenty empiryczne będzie miał postać

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i'\left(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{x}_i\,\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \frac{1}{n}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = 0$$

Co daje nam znany wzór $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}$

- Ogromną zaletą Uogólnionej Metody Momentów jest to, że niekiedy możliwe jest wyprowadzenie postaci warunków narzuconych na momenty bezpośrednio z teorii.

Przykład Hansen1982. Maksymalizacja użyteczności z konsumpcji w trakcie życia:

$$\max \mathrm{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{\beta}^t U\left(C_t\right)\right]$$

gdzie C_t jest konsumpcją w czasie t, $\boldsymbol{\beta} \in (0,1)$ jest czynnikiem dyskontującym i $U\left(C_t\right)$ jest funkcją użyteczności i w związku z tym jest wypukła. Załóżmy, że konsument może inwestować w N rodzajów akcji. Niech Q_{jt} oznacza liczbę akcji j w czasie t, P_{jt} jest ceną akcji w czasie t, D_{jt} jest dywidendą z akcji j zapłacone w czasie t, a W_t dochodem z pracy w czasie t. Możliwe do zrealizowania plany konsumpcyjne powinny spełniać serię warunków:

$$C_t + \sum_{j=1}^{N} P_{jt} Q_{jt} \leq \sum_{j=1}^{N} \left(P_{jt} + D_{jt}\right) Q_{jt} + W_t$$

Maksumalizacja oczekiwanej użyteczności przy takiej sekwencji ograniczeń budżetowych daje następujące rówanie Eulera:

$$P_{jt}U'\left(C_t\right) = \boldsymbol{\beta}\,\mathrm{E}_t\left[\left(P_{jt+1} + D_{jt+1}\right)U'\left(C_{t+1}\right)\right]$$

Ponieważ P_{jt} i C_t są znane w czasie t więc można to równanie zapisac także jako

$$\mathrm{E}_t\left[\frac{U'\left(C_{t+1}\right)}{U'\left(C_t\right)}x_{jt+1} - 1\right] = 0$$

gdzie $x_{jt+1} = \frac{P_{jt+1}+D_{jt+1}}{P_{jt}}$.

Załóżmy teraz, że funkcja użyteczności ma następującą postać $U\left(C_t\right) = \frac{\left(C_t\right)^{1+\boldsymbol{\alpha}}}{1+\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{\alpha} < 1$. Momenty narzucone na momenty przyjmą w rezultacie postać

$$\mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\beta} y_{t+1}^{\boldsymbol{\alpha}} x_{jt+1} - 1\right) = 0$$

gdzie $y_{t+1} = \frac{C_{t+1}}{C_t}$ jest równe wzrostowi realnej konsumpcji.

W ten sposób uzyskaliśmy tylko jedne ograniczenie narzucone na momenty przy dwóch parametrach do oszacowania $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$. Jeśli jednak oczekiwania konsumentów są racjonalne to jedyną informacją, która wpływa na ich realną konsumpcję jest informacja z obecnego okresu. W rezultacie:

$$\mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\beta} y_{t+1}^{\boldsymbol{\alpha}} x_{jt+1} - 1 \middle| y_t, x_{jt}, y_{t-1}, x_{jt-1}, \ldots\right) = \mathrm{E}_t\left(\boldsymbol{\beta} y_{t+1}^{\boldsymbol{\alpha}} x_{jt+1} - 1\right) = 0$$

co implikuje, że możemy użyć jako instrumentów $y_t, x_{jt}, y_{t-1}, x_{jt-1}, \ldots$ dodatkowe warunki momentowe

$$\begin{array}{l}
\mathrm{E}_t\left[\left(\boldsymbol{\beta} y_{t+1}^{\boldsymbol{\alpha}} x_{jt+1} - 1\right) y_t\right] = 0 \\
\mathrm{E}_t\left[\left(\boldsymbol{\beta} y_{t+1}^{\boldsymbol{\alpha}} x_{jt+1} - 1\right) x_{jt}\right] = 0 \\
\mathrm{E}_t\left[\left(\boldsymbol{\beta} y_{t+1}^{\boldsymbol{\alpha}} x_{jt+1} - 1\right) y_{t-1}\right] = 0 \\
\mathrm{E}_t\left[\left(\boldsymbol{\beta} y_{t+1}^{\boldsymbol{\alpha}} x_{jt+1} - 1\right) x_{jt-1}\right] = 0 \\
\vdots
\end{array}$$

W swoim artykule Hansen wyestymował swój model dla 2 miar konsumpcji:

wydatków na dobra nietrwałego użytku i usługi oraz wydatków na same wydatki nietrwałego użytku. Badał także 3 alternatywne miary przychodów z akcji. Ogólnie rzecz biorąc uzyskane oszacowania α i β są sensowne a test na przeidentyfikujące ograniczenia nie jest odrzucany.

Identyfikacja i asymptotyczne własności estymatorów GMM

- Założmy, że
$$\boldsymbol{m}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \operatorname{plim} \boldsymbol{m}_n\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \boldsymbol{M}'\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{l}$$
gdzie $\boldsymbol{m}_n\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_i\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)$, $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n)'$ a $\boldsymbol{l}$ jest wektorem jedynek.

- Możliwe jest jednoznaczne znalezienie $\boldsymbol{\theta}$ jeśli prawdziwe jest założenie, że
$$\boldsymbol{m}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = 0 \text{ dla } \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$$
$$\boldsymbol{m}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) \neq 0 \text{ dla } \dot{\boldsymbol{\theta}} \neq \boldsymbol{\theta}$$

- Jeśli $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\theta})$ nie spełnia tych warunków, to nie można jednoznacznie wyznaczyć estymatora parametru $\boldsymbol{\theta}$. W takim przypadku mówimy, że parametr $\boldsymbol{\theta}$ jest nieidentyfikowalny.

- Jeśli wektor $\boldsymbol{\theta}$ zawiera k parametrów, to ilość równań w musi być conajmniej równa k, by $\boldsymbol{\theta}$ było identyfikowalne

- Częsta jest sytuacja, kiedy ilość równań w przekracza k. Parametr $\boldsymbol{\theta}$ przeidentyfikowany.

- Możemy wyznaczyć $\boldsymbol{\theta}$ na postawie *jakichkolwiek* k równań

- Asymptotycznie równania te są niesprzeczne w małych próbach mogą być sprzeczne

- Jeśli spełnione są założenia Centralnego Twierdzenia Granicznego, to

$$n^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta}) \longrightarrow N(0, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\theta}))$$

gdzie

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{plim} \frac{1}{n}\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{plim} \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{\theta})$$

Przykład Dla rozkładu Poissona dla naturalnych y_i:

$$P(y_i) = \frac{e^{-\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\lambda}^{y_i}}{y_i!}$$

W rozkładzie Poissona $\mathrm{E}(y_i) = \mathrm{Var}(y_i) = \boldsymbol{\lambda}$. Załóżmy, że

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha} + x_i\boldsymbol{\beta}$$

oraz, że x_i jest nielosowe a $\overline{x}$, $\overline{x^2}$ są zgodne. Wynika z tego, że

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(y_i|\, x_i\right) &= \boldsymbol{\alpha} + x_i\boldsymbol{\beta} \\
\mathrm{Var}\left(y_i|\, x_i\right) &= \boldsymbol{\alpha} + x_i\boldsymbol{\beta} \\
\mathrm{E}\left(x_i y_i|\, x_i\right) &= x_i\left(\boldsymbol{\alpha} + x_i\boldsymbol{\beta}\right)
\end{aligned}$$

ale

$$\mathrm{Var}\left(y_i\right) = \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}\left(y_i|\, x_i\right)\right] + \mathrm{Var}\left[\mathrm{E}\left(y_i|\, x_i\right)\right]$$

Momenty bezwarunkowe

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(y_i\right) &= a + \mathrm{E}\left(x_i\right)\boldsymbol{\beta} \\
\mathrm{Var}\left(y_i\right) &= a + \mathrm{E}\left(x_i\right)\boldsymbol{\beta} + \mathrm{Var}\left(x_i\right)\boldsymbol{\beta}^2 \\
\mathrm{E}\left(x_i y_i\right) &= \mathrm{E}\left(x_i\right)a + \mathrm{E}\left(x_i^2\right)\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

Warunki narzucone na momenty implikują, że

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \boldsymbol{\alpha} + \overline{x}\boldsymbol{\beta} \\ s_y^2 &= \boldsymbol{\alpha} + \overline{x}\boldsymbol{\beta} + s_x^2\boldsymbol{\beta}^2 \\ \overline{yx} &= \boldsymbol{\alpha}\overline{x} + \overline{x^2}\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Z tego układu równań otrzymujemy dwa rozwiązania

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{s_{xy}}{s_x^2} \\ \widehat{\boldsymbol{\alpha}} &= \overline{y} - \overline{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\end{aligned}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\frac{s_y^2 - \overline{y}}{s_x^2}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{y} - \overline{x}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$$

Optymalna macierz wag

- Szukamy takiej średniej ważonej estymatorów dla przeidentyfikowanego $\boldsymbol{\theta}$ by wariancja była najmniejsza

- Problem szukania interesującego nas estymatora można sprowadzić do szukania minimum względem $\boldsymbol{\theta}$ formy kwadratowej:

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{m}_n'(\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta})$$

  gdzie $\boldsymbol{A}_n$ jest pewną dodatnio określoną macierzą, która spełnia

$$\operatorname{plim} \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}.$$

- Estymatorem $\boldsymbol{\theta}$ jest teraz takie $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, które minimalizuje funkcję $Q(\boldsymbol{\theta})$:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} \boldsymbol{m}_n' \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{m}_n \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

- Estymator ten będzie estymatorem zgodnym ponieważ spełnione są założenia konieczne dla zgodności estymatora M

- Rzeczywiście dla dodatnio określonej $\boldsymbol{A}_n$, $q(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{m}_n'(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta})$ daje najmniejszą wartość (równą 0) dla $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$.

- Można pokazać, że estymator GMM będzie miał najniższą wariancję jeśli $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}^{-1}$.

- Za $\boldsymbol{A}_n$ przyjmujemy więc zwykle $\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{\theta})$

- Ponieważ w momencie wyliczania estymatora nie znamy $\boldsymbol{\theta}$ więc zazwyczaj estymacja następuje w dwóch krkocach

1. najpierw znajdujemy $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ z użyciem jakiejkolwiek $\boldsymbol{A}_n$ (zwykle $\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{I}$), zanjdujemy oszacowanie $\boldsymbol{V}_n\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$
2. znajdujemy $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ za pomocą efektywnego GMM używając $\widehat{\boldsymbol{A}}_n = \boldsymbol{V}_n\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$

- Przy tak dobranej macierz $\boldsymbol{A}_n$ asymptotyczna rozkład estymatora GMM będzie dany wzorem

$$n^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \boldsymbol{\Sigma}\right)$$

gdzie $\boldsymbol{\Sigma} = \left(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{D}\right)^{-1}$ i $\boldsymbol{D}_n\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{m}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$.

Wybór instrumentów

- Generalnie im więcej instrumentów tym lepiej
- Trzeba jednak uważać, by nie używać intrumentów słabo skorelowanych ze zmiennymi objaśniającymi
  - przyjęcie takich intrumentów może doprowdzić do tego, że nawet niewielka korelacja intrumentu z zaburzeniem losowym doprowadzi do dużego obciążenia.
- Przy warunku

$$\mathrm{E}\left[\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\theta})\right|\boldsymbol{z}_i] = 0$$

- Każda funkcja $\boldsymbol{z}_i$ jest nieskorelowana z $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\theta})$ - potencjalnie nieskończenie wiele instrumentów

- Można pokazać, że wariancja będzie najniższa dla instrumentów danych wzorem:

$$\boldsymbol{J}_i = \mathrm{E}\left(\left. \frac{\partial \boldsymbol{f}_i\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right| \boldsymbol{z}_i \right)$$

- Intrumenty takie nazywamy optymalnymi intrumentami

Testowanie hipotez w GMM

- Testowanie w GMM daje proste wzory dla przypadku, kiedy macierz wag jest optymalna $\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{V}_n^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$. Najważniejszym testem jest test na przeidentyfikowujące ograniczenia

$$n\widehat{\boldsymbol{m}}'\widehat{\boldsymbol{V}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{m}} \xrightarrow{D} \boldsymbol{\chi}_g^2$$

  gdzie g jest ilością przeidentyfikowujących ograniczeń. Testuje on ograniczenia ponad te konieczne do identyfikacji.

- Dla hipotezy $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ i $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'}$ mamy odpowiednik GMM testu Walda:

$$W = n\widehat{\boldsymbol{h}}'\left[\widehat{\boldsymbol{H}}\left(\widehat{\boldsymbol{D}}'\widehat{\boldsymbol{V}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{D}}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{H}}'\right]^{-1}\widehat{\boldsymbol{h}} \xrightarrow{D} \boldsymbol{\chi}_g^2$$

gdzie $\widehat{\boldsymbol{H}}$, $\widehat{\boldsymbol{D}}$, $\widehat{\boldsymbol{h}}$, $\widehat{\boldsymbol{V}}$ są odpowiednimi macierzami policzonymi dla $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$: estymatora GMM w modelu bez ograniczeń.

- Odpowiednik testu LM ma postać

$$LM = n\widehat{\boldsymbol{m}}'_R\widehat{\boldsymbol{V}}_R^{-1}\widetilde{\boldsymbol{D}}_R\left(\widehat{\boldsymbol{D}}'_R\widehat{\boldsymbol{V}}_R^{-1}\widehat{\boldsymbol{D}}_R\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{D}}'_R\widehat{\boldsymbol{V}}_R^{-1}\widehat{\boldsymbol{m}}_R \xrightarrow{D} \boldsymbol{\chi}_g^2$$

gdzie $\widehat{\boldsymbol{m}}_R$, $\widehat{\boldsymbol{D}}_R$, $\widehat{\boldsymbol{V}}_R$ są odpowiednimi macierzami policzonymi dla $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_R$: estymatora GMM w modelu z ograniczeniami.

- Odpowiednikiem testu LR jest Quasi LR

$$\begin{aligned} QLR &= n\left(\widehat{\boldsymbol{m}}\widehat{\boldsymbol{V}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{m}} - \widehat{\boldsymbol{m}}'_R\widehat{\boldsymbol{V}}_R^{-1}\widehat{\boldsymbol{m}}_R\right) \\ &= n\left(Q\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) - Q\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_R\right)\right) \xrightarrow{D} \boldsymbol{\chi}_g^2 \end{aligned}$$