

## Uogólniona Metoda Momentów

- Momenty z próby dążą do momentów teoretycznych (Prawo Wielkich Liczb)

$$\text{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = E(y)$$

- Klasyczna **Metoda Momentów** (*MM*) polega na szacowaniu momentów teoretycznych  $E(y)$ , za pomocą momentów z próby.

**Przykład** Załóżmy, że próba pochodzi z rozkładu normalnego  $N(0, \sigma^2)$ . Jeśli spełnione są założenia prawa wielkich liczb, to

$$\text{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \text{plim} \bar{y} = E(y) = \mu$$

$$s_y^2 = \text{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = E [y^2 - E(y)] = \text{Var}(y) = \sigma^2$$

Za estymatory metody momentów  $\mu$  można więc przyjąć  $\bar{y}$  a  $\sigma^2$  można oszacować za pomocą  $s_y^2$ .

- Uogólniona Metoda Momentów (*GMM* - **G**eneralised **M**ethod of **M**oments) rozszerza tą metodę o dwa elementy.
- Wektor momentów teoretycznych jest funkcją nieznanego wektora parametrów  $\theta$  taką, że

$$E[m(y_i, x_i, \theta)] = 0$$

- $m(y_i, x_i, \theta)$  będziemy oznaczać jako  $m_i(\theta)$ .

- Jeśli spełnione są założenia prawa wielkich liczb, to

$$\text{plim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i(\boldsymbol{\theta}) = 0$$

- Estymator *GMM* rozwiązując następujący układ równań:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$$

- Bardzo często warunki wynikające z teorii mają postać momentów warunkowych:

$$E[\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\theta}) | \mathbf{z}_i] = 0$$

gdzie  $\mathbf{z}_i$  może częściowo składać się z elementów wektora zmiennych objaśniających  $\mathbf{x}_i$

- Liczenie empirycznych momentów warunkowych w przypadku, kiedy  $z_i$  jest ciągle jest sprawą beznadziejną.
- W związku z tym staramy się zastąpić momenty warunkowe momentami bezwarunkowymi.
- Z prawa iterowanych wartości oczekiwanych dla  $m_i(\theta) = w_i' f_i(\theta)$  i  $w_i = w(z_i)$  wynika, że

$$E[m_i(\theta)] = E[w_i' f_i(\theta)] = E_{z_i}[w_i' E(f_i(\theta) | z_i)] = 0$$

- I ograniczenia narzucone na warunkowe wartości oczekiwane możemy zastąpić ograniczeniami narzuconymi na bezwarunkowe wartości oczekiwane

$$E[w_i' f_i(\theta)] = 0.$$

- Elementy wektora  $w_i$  nazywamy instrumentami

**Przykład** Wyprowadzenie estymatora MNK w Uogólnionej Metodzie Momentów

Założenia *KMRL* można modyfikować w sposób następujący:

1.  $y_i = x_i\beta + \varepsilon_i$

2.  $E(\varepsilon_i | x_i) = 0$

3.  $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$

Zauważmy, że założenia o tym, że  $x_i$  jest deterministyczne i  $E(\varepsilon_i) = 0$  zastąpiło założenie, że  $E(\varepsilon_i | x_i) = 0$ . Przyjmijmy za instrumenty w

tym modelu elementy  $x_i$ . Otrzymujemy następujący warunek nałożony na bezwarunkową wartość oczekiwaną:

$$E(x_i' \varepsilon_i) = E[x_i' (y_i - x_i \beta)] = 0$$

Odpowiadający temu warunkowi warunek narzucony na momenty empiryczne będzie miał postać

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i' (y_i - x_i \hat{\beta}) = \frac{1}{n} (X' y - X' X \hat{\beta}) = 0$$

Co daje nam znany wzór  $\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' y$

- Ogromną zaletą Uogólnionej Metody Momentów jest to, że niekiedy możliwe jest wyprowadzenie postaci warunków narzuconych na momenty bezpośrednio z teorii.

# Identyfikacja i asymptotyczne własności estymatorów

## *GMM*

- Załóżmy, że

$$m(\dot{\theta}) = \text{plim } m_n(\dot{\theta}) = M'(\dot{\theta})l$$

gdzie  $m_n(\dot{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i(\dot{\theta})$ ,  $M = (m_1, \dots, m_n)'$  a  $l$  jest wektorem jedynek.

- Możliwe jest jednoznaczne znalezienie  $\theta$  jeśli prawdziwe jest założenie, że

$$m(\dot{\theta}) = 0 \text{ dla } \dot{\theta} = \theta$$

$$m(\dot{\theta}) \neq 0 \text{ dla } \dot{\theta} \neq \theta$$

- Jeśli  $m(\theta)$  nie spełnia tych warunków, to nie można jednoznacznie wyznaczyć estymatora parametru  $\theta$ . W takim przypadku mówimy, że parametr  $\theta$  jest nieidentyfikowalny.
- Jeśli wektor  $\theta$  zawiera  $k$  parametrów, to ilość równań  $w$  musi być conajmniej równa  $k$ , by  $\theta$  było identyfikowalne
- Często jest sytuacja, kiedy ilość równań  $w$  przekracza  $k$ . Parametr  $\theta$  przeidentyfikowany.
- Możemy wyznaczyć  $\theta$  na podstawie *jakichkolwiek*  $k$  równań
- Asymptotycznie równania te są niesprzeczne w małych próbach mogą być sprzeczne



- Jeśli spełnione są założenia Centralnego Twierdzenia Granicznego, to

$$n^{\frac{1}{2}}\mathbf{m}_n(\boldsymbol{\theta}) \longrightarrow N(0, \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}))$$

gdzie

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = \text{plim} \frac{1}{n} \mathbf{M}'(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \text{plim} \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\theta})$$

**Przykład** Dla rozkładu Poissona dla naturalnych  $y_i$ :

$$P(y_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!}$$

W rozkładzie Poissona  $E(y_i) = \text{Var}(y_i) = \lambda$ . Załóżmy, że

$$\lambda = \alpha + x_i \beta$$

oraz, że  $x_i$  jest nielosowe a  $\bar{x}$ ,  $\overline{x^2}$  są zbieżne. Wynika z tego, że

$$E(y_i) = \lambda_i$$

$$\text{Var}(y_i) = \lambda_i$$

$$E(x_i y_i) = x_i \lambda_i$$

Warunki narzucone na momenty implikują, że

$$\bar{y} = \alpha + \bar{x}\beta$$

$$s_y^2 = \alpha + \bar{x}\beta$$

$$\overline{yx} = \alpha\bar{x} + \overline{x^2}\beta$$

Z tego układu równań otrzymujemy dwa rozwiązania

$$\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\overline{yx} - s_y^2\bar{x}}{s_x^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \bar{y} - \bar{x}\tilde{\beta}$$

## Optymalna macierz wag

- Szukamy takiej średniej ważonej estymatorów dla preidentyfikowanego  $\theta$  by wariancja była najmniejsza
- Problem szukania interesującego nas estymatora można sprowadzić do szukania minimum względem  $\theta$  formy kwadratowej:

$$Q(\theta) = \mathbf{m}'_n(\theta) \mathbf{A}_n \mathbf{m}_n(\theta)$$

gdzie  $\mathbf{A}_n$  jest pewną dodatnio określoną macierzą, która spełnia

$$\text{plim } \mathbf{A}_n = \mathbf{A}.$$

- Estymatorem  $\theta$  jest teraz takie  $\hat{\theta}$ , które minimalizuje funkcję  $Q(\theta)$ :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\hat{\theta}} \mathbf{m}'_n(\hat{\theta}) \mathbf{A}_n \mathbf{m}_n(\hat{\theta})$$

- Estymator ten będzie estymatorem zgodnym ponieważ spełnione są założenia konieczne dla zgodności estymatora  $M$
- Rzeczywiście dla dodatnio określonej  $\mathbf{A}_n$ ,  $q(\theta) = \mathbf{m}'_n(\theta) \mathbf{A}_n \mathbf{m}_n(\theta)$  daje najmniejszą wartość (równą 0) dla  $\theta = \theta_0$ .
- Można pokazać, że estymator  $GMM$  będzie miał najniższą wariancję jeśli  $\mathbf{A} = \mathbf{V}^{-1}$ .
- Za  $\mathbf{A}_n$  przyjmujemy więc zwykle  $\mathbf{A}_n = \mathbf{V}_n(\theta)$

- Ponieważ w momencie wyliczania estymatora nie znamy  $\theta$  więc zazwyczaj estymacja następuje w dwóch krokach
  1. najpierw znajdujemy  $\hat{\theta}$  z użyciem jakiegokolwiek  $A_n$  (zwykle  $A_n = I$ ), znajdujemy oszacowanie  $V_n(\hat{\theta})$
  2. znajdujemy  $\hat{\theta}$  za pomocą efektywnego *GMM* używając  $\hat{A}_n = V_n(\hat{\theta})$
- Przy tak dobranej macierzy  $A_n$  asymptotyczny rozkład estymatora *GMM* będzie dany wzorem

$$n^{\frac{1}{2}} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$$

gdzie  $\Sigma = (D'V^{-1}D)^{-1}$  i  $D_n(\theta) = \frac{\partial \mathbf{m}_n(\theta)}{\partial \theta}$ .

## Wybór instrumentów

- Generalnie im więcej instrumentów tym lepiej
- Trzeba jednak uważać, by nie używać instrumentów słabo skorelowanych ze zmiennymi objaśniającymi
  - przyjęcie takich instrumentów może doprowadzić do tego, że nawet niewielka korelacja instrumentu z zaburzeniem losowym doprowadzi do dużego obciążenia.

- Przy warunku

$$E [f_i(\theta) | z_i] = 0$$

- Każda funkcja  $z_i$  jest nieskorelowana z  $f_i(\theta)$  - potencjalnie nieskończenie wiele instrumentów

- Można pokazać, że wariancja będzie najniższa dla instrumentów danych wzorem:

$$\mathbf{J}_i = \mathbb{E} \left( \left. \frac{\partial f_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right| \mathbf{z}_i \right)$$

- Instrumenty takie nazywamy optymalnymi instrumentami



## Testowanie hipotez w *GMM*

- Testowanie w *GMM* daje proste wzory dla przypadku, kiedy macierz wag jest optymalna  $A_n = V_n^{-1}(\hat{\theta})$ . Najważniejszym testem jest test na preidentyfikowujące ograniczenia

$$n\hat{m}'\hat{V}^{-1}\hat{m} \xrightarrow{D} \chi_g^2$$

gdzie  $g$  jest ilością preidentyfikowujących ograniczeń. Testuje on ograniczenia ponad te konieczne do identyfikacji.

- Dla hipotezy  $h(\theta) = 0$  i  $H(\theta) = \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta'}$  mamy odpowiednik *GMM* testu Walda:

$$W = n\hat{h}' \left[ \hat{H} \left( \hat{D}'\hat{V}^{-1}\hat{D} \right)^{-1} \hat{H}' \right]^{-1} \hat{h} \xrightarrow{D} \chi_g^2$$

gdzie  $\widehat{H}$ ,  $\widehat{D}$ ,  $\widehat{h}$ ,  $\widehat{V}$  są odpowiednimi macierzami policzonymi dla  $\widehat{\theta}$ : estymatora *GMM* w modelu bez ograniczeń.

- Odpowiednik testu *LM* ma postać

$$LM = n \widehat{m}'_R \widehat{V}_R^{-1} \widetilde{D}_R \left( \widehat{D}'_R \widehat{V}_R^{-1} \widehat{D}_R \right)^{-1} \widehat{D}'_R \widehat{V}_R^{-1} \widehat{m}_R \xrightarrow{D} \chi^2_g$$

gdzie  $\widehat{m}_R$ ,  $\widehat{D}_R$ ,  $\widehat{V}_R$  są odpowiednimi macierzami policzonymi dla  $\widehat{\theta}_R$ : estymatora *GMM* w modelu z ograniczeniami.

- Odpowiednikiem testu *LR* jest Quasi *LR*

$$\begin{aligned} QLR &= n \left( \widehat{m} \widehat{V}^{-1} \widehat{m} - \widehat{m}'_R \widehat{V}_R^{-1} \widehat{m}_R \right) \\ &= n \left( Q \left( \widehat{\theta} \right) - Q \left( \widehat{\theta}_R \right) \right) \xrightarrow{D} \chi^2_g \end{aligned}$$