1 Powtórzenie z algebry - pojęcia

1. Algebra macierzy: dodawanie, mnożenie, transponowanie
2. Własności wyznacznika macierzy
3. Formy kwadratowe, definicja dodatniej określoności
4. Definicja śladu - własności śladu
5. Definicja macierzy idempotentnej
6. Dowód, że pierwiastki własne dla dowolnej macierzy idempotentnej $\mathbf{M}$ są równe 0 lub 1 i rząd tej macierzy $\mathrm{tr}\,(\mathbf{M})$.
7. (*) Pojęcie rzutu prostopadłego wektora w przestrzeń, pojęcie wektora ortogonalnego
8. (*) Interpretacje macierzy $\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$ jako macierzy rzutów

1.1 Zadania

1. Mamy macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   Policzyć $2\mathbf{A}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}'$, $\mathbf{AB}$, $|\mathbf{AB}|$. Wyjaśnić dlaczego nie można policzyć $\mathbf{AB}'$ i $\mathbf{A}+\mathbf{B}$

2. Mamy dwie macierz kwadratowe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

   Pokazać, że macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczna. Pokaż, że $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Udowodnij, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{AB}$ są osobliwe.

3. Rozwinąć (załóżmy, że $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są odwracalne): $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{C}+\mathbf{D})'$, $(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{B}^{-1}$, $(\mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$, $|\mathbf{AB}|$
4. Pokazać, że dla dowolnego odwracalnego $\mathbf{A}$, $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$
5. Pokazać (z definicji), że macierz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ jest nieujemnie określona

6. Pokazać (z definicji liniowej niezależności), że macierz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ jest nieosobliwa jeśli kolumny macierzy $\mathbf{X}$ są liniowo niezależne

7. (*) Udowodnić, że $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ jest dodatnio określona to $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ jest też dodatnio określona (skorzystaj z dekompozycji spektralnej macierzy symetrycznej)

8. (*) Mamy macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, znajdź macierz idempotentną $\mathbf{A}_\perp$ ortogonalną do tej macierzy. Dla wektora $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, znaleź taki wektor $\mathbf{v}$, że $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{A}_\perp\mathbf{x}$. Pokaż, że kwadrat długości wektora $\mathbf{x}$ jest równy sumie długości wektorów $\mathbf{A}\mathbf{v}$ i $\mathbf{A}_\perp\mathbf{x}$. Udowodnij, że nie istnieje taki wektor $\mathbf{z}$ dla którego długość wektora $\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{z}$ byłaby mniejsza niż długość wektora $\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{v}$

9. Udowodnij, że dla macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ o odpowiednich wymiarach $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$

10. Udowodnij, że dla śladu macierzy prawdą jest, że $\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$, $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$

11. Pokaż, że dla idempotentnego $\mathbf{P}$, $\mathrm{M} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ jest także idempotentne oraz, że $\mathbf{MA} = \mathbf{0}$

12. Pokaż, że macierz $\mathbf{P}$ dla dowolnego $\mathbf{A}$ takiego, że $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ jest nieosobliwe
$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}'\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}'$$
jest idempotentna.

13. Udowodnij, że macierz $\mathrm{M} = \mathbf{I} - n^{-1}\mathbf{l}\mathbf{l}'$ jest macierzą idempotentną rzędu $n-1$ oraz $\mathbf{l}'\mathrm{M} = 0$. $\mathbf{l}$ jest n wymiarowym wektorem jedynek. Policzyć $\operatorname{tr}(\mathbf{M})$.

2 Analiza matematyczna - pojęcia

1. Pojęcie pochodnej funkcji skalarnej i wektorowej liczonej względem wektora zmiennych

2. Pokazać, że dla wektorów kolumnowych $\mathbf{a}$ i $\boldsymbol{\beta}$ mamy $\frac{\partial \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{a}$ i $\frac{\partial \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \mathbf{a}'$

3. Pokazać, że $\frac{\partial \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \mathbf{A}$ i $\frac{\partial \boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}$

4. Pokazać, że $\frac{\partial \boldsymbol{\beta}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = 2\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$

5. Jaki wartość powinien przyjmować gradient ciągłej i różniczkowalnej funkcji $f(\boldsymbol{\beta})$ w punkcie $\boldsymbol{\beta}^*$, aby $\boldsymbol{\beta}^*$ mogło być punktem, w którym funkcja przyjmuje maksimum

6. Jaką chrakterystyczną cechę ma macierz drugich pochodnych?

7. Jak można rozpoznać na podstawie własności macierzy drugich pochodnych, że ekstremum funkcji wielu zmiennych jest maksiumum?

2.1 Analiza matematyczna - Zadania

1. Znaleźć gradient i Hessian dla funkcji $y = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 - 4$. Znaleźć ekstremum tej funkcji i określ jego typ.

2. Znaleźć ekstremum funkcji $y = x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2 - 1$ i określić jego typ. Znaleźć ekstremum tej samej funkcji przy warunku pobocznym $x_2 - 2x_1 = 1$ posługując się funkcją Lagrange i wstawiając ograniczenia bezpośrednio do funkcji celu. Porównać wielkość funkcji celu w ekstremum w przypadku istnienia warunku pobocznego i w przypadku braku tego warunku.

3. Znaleziono maksima $g^* = \max\limits_{x_1,x_2} g(x_1, x_2)$ i $g^{**} = \max\limits_{x_1} g(x_1, 0)$. Jak się mają do siebie g^* i g^{**}?

4. Znaleziono maksima z ograniczeniami (warunkami pobocznymi) $g^* = \max\limits_{x_1,x_2} g(\mathbf{x})$ s.t. $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$ i maksimum bez ograniczeń $g^{**} = \max\limits_{x_1,x_2} g(\mathbf{x})$. Jak się mają do siebie g^* i g^{**}?

5. Znaleziono maksimum z ograniczeniami $g^* = \max\limits_{x_1,x_2} g(\mathbf{x})$ s.t. $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \geqslant 0$, przy czym okazało się, że i-ty wiersz macierzy $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ w punkcie maksimum jest większy od zera ($\mathbf{H}_i(\mathbf{x}^*) > 0$). Jaka jest wartość mnożnika Lagrangre'a dla i-tego ograniczenia w tym zadaniu?